

باسمه تعالی
نوزدهمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر
آزمون نهایی درس الگوریتم

یکشنبه ۲۵ مرداد ۱۳۸۸

وقت: ۳ و نیم ساعت

مهدیه، غفورزاده

مسئله‌ی اول: ادغام BST ۱۵ نمره

الگوریتمی از $O(m+n)$ ارائه کنید که دو BST از ورودی بگیرد و یک BST در خروجی بدهد که شامل تمام اعداد BST اول و تمام اعداد BST دوم باشد. تعداد اعداد درون BST اول و دوم به ترتیب m و n است و اعداد BST ها به تنهایی و روی هم متمایزند.

مسئله‌ی دوم: خروج از پارکینگ ۲۰ نمره

ماشین شما در یک پارکینگ به شکل یک جدول $m \times n$ پارک شده است. هر خانه از جدول یا توسط یک ماشین پر شده است یا کاملاً خالی است. ماشین شما اکنون در گوشه‌ی بالا و چپ جدول قرار دارد و می‌خواهید آن را از پارکینگ خارج کنید. در هر حرکت می‌توان به یکی از خانه‌های سمت چپ، راست یا پایین رفت در صورتی که آن خانه خالی باشد، ولی مجاز به حرکت به سمت بالا نیستید.

در صورتی که خانه‌ی پایینی خالی نباشد، می‌توانیم راننده‌ی آن ماشین را پیدا کنیم و از او خواهش کنیم که ماشینش را از پارکینگ خارج کند. از آنجا که انتقال ماشین به خانه‌ی سمت چپ و راست در این پارکینگ سخت است، می‌خواهیم هنگام خروج از پارکینگ حداکثر k حرکت چپ و راست انجام دهیم. درب خروج پارکینگ درست زیر خانه‌ی گوشه‌ی پایین و سمت راست جدول است.

الگوریتمی از مرتبه‌ی $O(mnk)$ ارائه کنید که مسیری برای ماشین بیابد که شروط مذکور را رعایت کند و کمترین تعداد پیدا کردن راننده را لازم داشته باشد. خروجی الگوریتم دنباله‌ای از اعمال است، هر عمل یا حرکت به چپ، راست یا پایین، و یا پیدا کردن راننده‌ی ماشین پایینی است.

مسئله‌ی سوم: کم‌ترین عدد قابل دسترسی ۳۰ نمره

گراف جهت‌دار $G = (V, E)$ را در نظر بگیرید که $|V| = n$ و $|E| = m$ است. روی هر یک از رئوس G یک عدد طبیعی بین ۱ تا n^2 نوشته شده است.

مجموعه‌ی رئوسی که راس v به آن‌ها مسیر جهت‌دار دارد را $S(v)$ می‌نامیم ($v \in S(v)$). از میان اعداد نوشته شده روی رئوس $S(v)$ ، کوچکترین عدد را $l(v)$ می‌نامیم.

الگوریتمی از $O(n+m)$ بدهید که $l(v)$ را برای تمام رئوس $v \in V$ حساب کنید.

مسئله‌ی چهارم: بازه‌ها ۳۵ نمره

n بازه‌ی $[a_i, b_i]$ به ما یک به یک داده می‌شوند که a_i و b_i اعدادی طبیعی هستند. یک محور از اعداد طبیعی هم در نظر بگیرید. در ابتدا کل محور سفید است. با گرفتن هر بازه تمام قسمتی که توسط آن پوشیده می‌شود را سیاه می‌کنیم. می‌خواهیم پس از گرفتن هر بازه و قبل از دریافت بازه‌ی بعد، بزرگترین مقدار x را مشخص کنیم طوری که $[1, x]$ سفید است. الگوریتمی از مرتبه‌ی $O(n \lg n)$ ارائه کنید.

«موفق باشید»