

باسمه تعالی
هفدهمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر
آزمون پایان‌ترم درس الگوریتم

پنج‌شنبه ۸ شهریور ۱۳۸۶

وقت: ۳ ساعت

نوروزی، قدسی، زادی‌مقدم

مسئله‌ی اول: درخت در گراف متریک ۱۰ نمره

به یک گراف کامل وزن دار n رأسی متریک می‌گوییم اگر و فقط اگر به ازای هر سه رأس u, v, w داشته باشیم $w(u, v) + w(v, w) \geq w(u, w)$ که در آن $w(i, j)$ وزن یال بین دو رأس i و j است. یک زیردرخت فراگیر در این گراف را خوب می‌گوییم اگر و فقط اگر وزن کوتاهترین (کم‌وزن‌ترین) مسیر بین هر دو رأس در این درخت حداکثر n برابر وزن کوتاهترین مسیر بین همان دو رأس در گراف اصلی باشد. الگوریتمی از زمان $O(n^2)$ ارائه کنید که با دریافت یک گراف کامل وزن دار متریک از ورودی، یک زیردرخت فراگیر خوب در گراف پیدا کند. الگوریتم خود را تحلیل و اثبات کنید.

مسئله‌ی دوم: نسبت تاریخی ۱۵ نمره

داده‌ساختار DisJOINT-SET با Path-Compression را در به‌ترین حالت نظر بگیرید. می‌خواهیم این داده ساختار را طوری تغییر دهیم تا علاوه بر اعمال Find(x) و Merge(S_1, S_2) بتواند عمل HISTORICAL-FIND(x, y, t) را هم انجام دهد. این عمل به این معنی است که آیا اشیاء x و y در زمان t در یک مجموعه بوده‌اند یا خیر. منظور از زمان t ، زمانی است که t امین عمل بر روی این داده‌ساختار انجام می‌شود. اگر تعداد اعضای درون داده‌ساختار n باشد، نشان دهید چگونه می‌توان با حافظه مصرفی $O(n)$ برای کل داده‌ساختار و بدون تغییر در زمان اجرای دو عمل دیگر، کاری کرد تا هر عمل HISTORICAL-FIND در زمان $O(\lg n)$ پاسخ داده شود. روش خود را دقیق و با تحلیل ارائه کنید.

مسئله‌ی سوم: دنباله‌ی تقریباً مرتب ۲۰ نمره

یک دنباله‌ی نامرتب از n عدد حقیقی داده شده است. هم‌چنین به ما گفته شده است که این دنباله را می‌توان با حداکثر ۱۰ عمل جابجایی^۱ مرتب کرد. الگوریتمی از $O(n)$ ارائه کنید که این اعداد را مرتب کند. الگوریتم خود را تحلیل و اثبات کنید.

مسئله‌ی چهارم: میانه و میانگین ۲۵ نمره

n عدد حقیقی داده شده‌اند. خوبیت یک سه‌تایی مرتب (a, b, c) از این اعداد که $a \leq b \leq c$ است را قدرمطلق تفاضل میانه و میانگین این سه عدد تعریف می‌کنیم. میانه‌ی سه عدد $a \leq b \leq c$ همان عدد وسطی یعنی b می‌باشد. می‌خواهیم از بین تمام $\binom{n}{3}$ تا سه‌تایی ممکن، سه‌تایی‌ای را انتخاب کنیم که خوبیت آن در مقایسه با سایر سه‌تایی‌ها کمینه باشد. برای این کار الگوریتمی از $O(n^2)$ ارائه دهید. الگوریتم خود را تحلیل و اثبات کنید.

^۱عوض کردن جای دو عدد نه‌لزوماً متوالی؛ Swap

مسئله پنجم: زیردنباله‌ی تناوبی ۳۰ نمره

یک دنباله از اعداد متفاوت تناوبی است اگر و فقط نسبت (بزرگی یا کوچکی) هر عدد با دو عدد کناری اش (در صورت وجود) متفاوت باشد. به عبارت دیگر هر یک از اعداد این دنباله (به جز اولی و آخری) دقیقاً از یکی از دو عدد کناری اش کوچک تر و از دیگری بزرگ تر باشد.

یک دنباله از n عدد متفاوت داده شده است. می‌خواهیم بزرگترین زیردنباله‌ی (نه لزوماً متوالی) از اعضای این دنباله را پیدا کنیم به طوری که اعداد این زیردنباله، یک دنباله‌ی تناوبی را تشکیل دهند. مثلاً یکی از بزرگترین زیردنباله‌های تناوبی دنباله‌ی $۱۱, ۰, ۵, -۲, ۱, ۲۰, ۴, ۳, ۱۱, ۰, ۵, -۲, ۴, ۳$ است. الگوریتمی با زمان اجرای متوسط $O(n \lg n)$ برای پیدا کردن بزرگ‌ترین زیردنباله تناوبی روی یک دنباله ارائه کنید.

زمان اجرای یک الگوریتم برای چنین کاری «به‌طور متوسط» از $O(n \lg n)$ است، اگر و فقط اگر جمع زمان اجرای این الگوریتم روی همه‌ی $n!$ جایگشت‌های n عدد متفاوت (به‌عنوان ورودی الگوریتم) از $O(n! \times n \lg n)$ باشد.

تو را من چشم در راهم شباهنگام
که می‌گیرند در شاخ «تلاجن» سایه‌ها رنگ سیاهی
وزان دلخستگانت راست اندوهی فراهم.
تو را من چشم در راهم.

شباهنگام، در آن دم که بر جا دره‌ها چون مرده‌ماران خفتگان‌اند،
در آن نوبت که بندد دست نیلوفر به پای سرو کوهی دام
گرم یاد آوری یا نه، من از یادت نمی‌کاهم
تو را من چشم در راهم.

[نیمای پوشیج، ۱۳۳۸ - ۱۲۷۴]