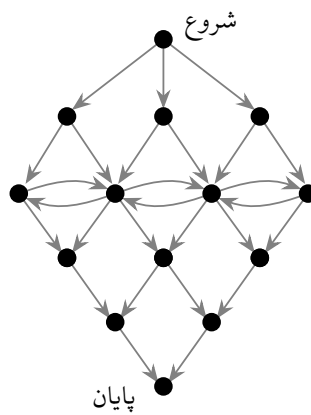


مرحله‌ی دوم سی و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور- آزمون چندگزینه‌ای

- زمان آزمون ۲۱۰ دقیقه است.
- آزمون ۲۰ سوال دارد.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها به طور تصادفی است.
- سوالات ۱۷ تا ۲۰ در دسته‌های چند سوالی آمده‌اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.

۱. مریم می‌خواهد از بالاترین رأس گراف جهت‌دار زیر به پایین‌ترین رأس آن برود. او تنها می‌تواند در جهت مشخص‌شده روی یال‌ها حرکت کند و نمی‌تواند از هیچ رأسی بیش از یک بار عبور نماید. مریم به چند روش می‌تواند این مسیر را بپیماید؟



۶۰ (۵)

۹۶ (۴)

۱۴ (۳)

۴۸ (۲)

۷۲ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

اگر دو یال ابتدای مسیر و سه یال انتهای مسیر را انتخاب کنیم، باقی مسیر به شکل یکتا مشخص می‌شود. یال اول مسیر سه حالت دارد و بعد از انتخاب یال اول، یال دوم نیز دو حالت دارد. بنابراین:

$$۳ \times ۲ = ۶$$

حالت برای دو یال اول مسیر وجود دارد.

یال آخر مسیر دو حالت دارد و مشابه انتخاب‌های قبل، پس از انتخاب یال آخر، یال یکی مانده به آخر نیز دو حالت دارد، و به طور مشابه یال دو تا مانده به آخر نیز پس از انتخاب دو یال آخر دو حالت دارد. بنابراین:

$$۲ \times ۲ \times ۲ = ۸$$

حالت برای سه یال آخر مسیر داریم.

بنابراین در مجموع:

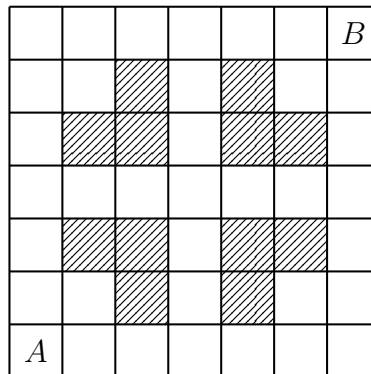
$$۳ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۴۸$$

مرحله‌ی دوم سی و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور- آزمون چندگزینه‌ای

حالت برای این کار موجود است.

□

۲ بردیا می‌خواهد در جدول زیر از خانه‌ی A به خانه‌ی B برود. در خانه‌هایی از این جدول که با هاشور مشخص شده‌اند، مانع وجود دارد. او در هر مرحله می‌تواند به یکی از خانه‌های مجاور ضلعی خانه‌ی فعلی‌اش برود، ولی نمی‌تواند وارد خانه‌ای شود که قبلاً در آن حضور داشته یا در آن مانع هست. بردیا به چند روش می‌تواند این مسیر را طی کند؟



۶۴ (۵)

۸۰ (۴)

۱۰۴ (۳)

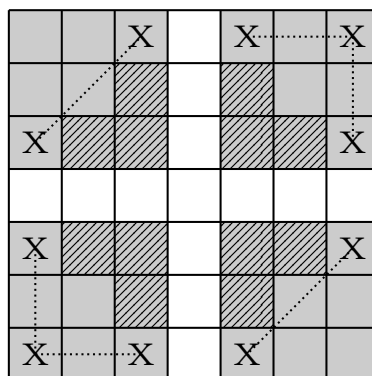
۴۸ (۲)

۹۶ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

در شکل زیر، ۴ بخش در جدول به وجود می‌آید که در هر کدام از آن‌ها تعدادی ضربدر وجود دارد که با خط‌چین به هم متصل شده‌اند. برای رفتن از هریک از ضربدرهای موجود در هر بخش به سمت دیگر خط‌چین آن، دقیقاً ۲ حالت وجود دارد. همچنین با رفتن به هریک از ضربدرها، باید به یکی از خط‌چین‌های مجاور آن برویم تا بتوانیم از آن ناحیه خارج شویم. برای خارج شدن از ناحیه‌ی اول، $4 = 2 \times 2$ حالت وجود دارد. ۲ حالت برای ضربدری که از آن خارج می‌شویم وجود دارد، که ما به تقارن فرض می‌کنیم از ضربدر بالا خارج می‌شویم. ۲ حالت هم برای نحوه رسیدن به ضربدر بالا وجود دارد.

و برای رسیدن به نقطه‌ی پایان در ناحیه‌ی نهایی نیز ۲ حالت (با فرض مشخص بودن ضربدر ورود به ناحیه‌ی نهایی) وجود دارد. در نتیجه پاسخ مضربی از ۸ است. با مشخص کردن تعداد بخش‌های مختلف دیده شده در حین مسیر (صفر، یک یا دو) می‌توانیم تعداد حالات مطلوب را بشماریم:



مرحله‌ی دوم سی و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور- آزمون چندگزینه‌ای

- ناحیه: کافی است مشخص کنیم از کدام طرف وارد ناحیه‌ی نهایی شویم. در نتیجه این بخش مجموعاً ۲ حالت دارد.

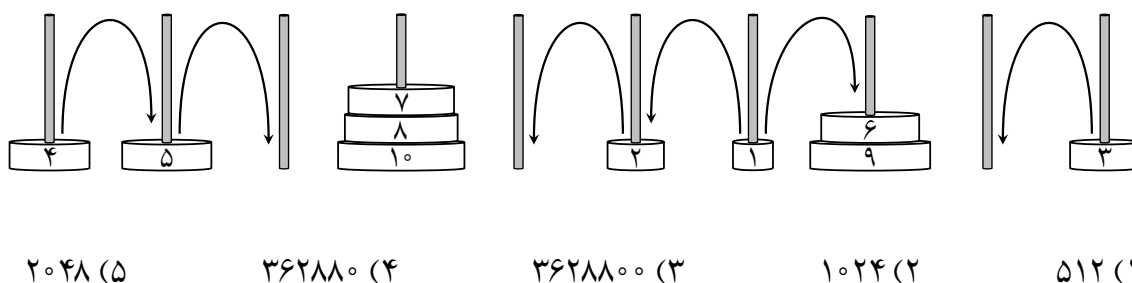
- ۱ ناحیه: با مشخص کردن ناحیه، مسیر حرکت تا ورود به آن ناحیه مشخص می‌شود. در ادامه تنها کافی است به ناحیه‌ی نهایی وارد شویم که در صورتی که در ابتدا به ناحیه‌ی بالا چپ رفته باشیم، ۲ حالت و در غیر این صورت، ۱ حالت دارد. در نتیجه این بخش در مجموع $6 = 2 + (2 \times 2)$ حالت دارد.

- ۲ ناحیه: در این حالت ابتدا باید وارد ناحیه‌ی بالا چپ و سپس وارد ناحیه‌ی پایین راست شویم. باقی مسیر بین نواحی به صورت یکتا مشخص می‌شود. در نتیجه این بخش در مجموع $4 = 2 \times 2$ حالت دارد.

در نتیجه، در مجموع تعداد حالات برابر با $96 = 8 \times 12 = 8 \times (2 + 6 + 4)$ است.

□

۱۰ میله مانند شکل زیر، در یک ردیف روی زمین نصب شده‌اند. ملیکا ۱۰ دیسک با وزن‌های ۱ تا ۱۰ کیلوگرم (از هر وزن، دقیقا یک دیسک) دارد و در ابتدا، دقیقا یک دیسک را در هر میله گذاشته است. او در هر مرحله می‌تواند یک میله را که دقیقا یک دیسک دارد، انتخاب و دیسک آن را خارج کند و از بالا داخل یکی از میله‌های مجاورش بیندازد، به شرطی که دیسک جابه‌جاشده از بالاترین دیسک میله‌ی مقصد سبک‌تر باشد یا این که میله‌ی مقصد هیچ دیسکی نداشته باشد. برای مثال، وضعیت دیسک‌ها می‌تواند پس از تعدادی مرحله، مانند شکل زیر باشد و در مرحله‌ی بعد، ملیکا می‌تواند در جهت یکی از پیکان‌های کشیده‌شده دیسکی را جابه‌جا کند. از میان همه‌ی حالات ممکن برای چینش اولیه‌ی دیسک‌ها در میله‌ها، ملیکا برای چند حالت می‌تواند همه‌ی دیسک‌ها را با تعدادی حرکت، به یک میله منتقل کند؟ فرض کنید هر یک از میله‌ها به قدری بلند است که بتوان همه‌ی ۱۰ دیسک را با هم در آن میله جای داد و فاصله بین میله‌ها نیز به حدی هست که دیسک‌های دو میله‌ی مجاور به هم گیر نکنند.



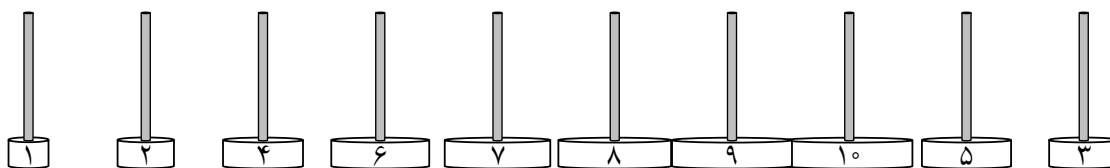
پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

این کار تنها در صورتی قابل انجام است که دیسک‌های قبل از دیسک ده کیلوگرمی تشکیل یک دنباله‌ی صعودی دهند و دیسک‌های بعد از دیسک ده کیلوگرمی تشکیل یک دنباله‌ی نزولی دهند. برای اثبات این موضوع، ابتدا نشان می‌دهیم که حالت‌های اولیه با این شرط، حالت‌های مناسبی هستند. در این حالات، کافی است ابتدا دیسک ۹ را روی دیسک ده بگذاریم، سپس دیسک ۸ را روی دیسک ۹ (که خود بر روی دیسک ۱۰ است) بگذاریم و به همین ترتیب ادامه دهیم. این کار به دلیل این است که وقتی می‌خواهیم دیسک i را روی دیسک $i + 1$ (که در میله‌ای است که همه‌ی دیسک‌های $۱, ۲, ۳, \dots, i$ در آن هستند) بگذاریم، هیچ دیسک دیگری در مسیر این دیسک تا میله‌ی مقصد وجود ندارد. بنابراین، می‌تواند به راحتی به آن جا برود. باقی حالات هم ممکن نیستند، زیرا اگر هر میله‌ای در یک زمانی شامل دو دیسک شود، از این میله دیگر نمی‌توان دیسکی را خارج کرد. این موضوع نشان می‌دهد که هیچ میله‌ای به جز میله‌ی شامل دیسک دهم نباید دو دیسک شود.

پس این بدان معناست که دیسک‌ها باید دانه به دانه بیایند و از بالا وارد میله‌ی دیسک دهم شوند. این یعنی دیسک‌های مسیری که یک دیسک را به دیسک دهم وصل می‌کند باید از آن دیسک سنگین‌تر باشد. این نشان می‌دهد دیسک‌های سمت چپ دیسک دهم باید صعودی و دیسک‌های سمت راست آن باید نزولی باشد. برای شمارش این حالات، کافی است برای هر عدد بین ۱ تا ۹ مشخص کنیم که باید سمت راست یا چپ دیسک ده کیلوگرمی باشد و پس از مشخص شدن جایگاه نسبی هر دیسک نسبت به دیسک ده کیلوگرمی، چیدن آن‌ها به شکل یکتا مشخص می‌شود.

مرحله‌ی دوم سی و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور- آزمون چندگزینه‌ای

دیسک‌های چپ به شکل صعودی و دیسک‌های راست به شکل نزولی باید چیده شوند. بنابراین تعداد حالات برابر با 2^9 است.



□

شکل بالا یکی از حالات ممکن را نشان می‌دهد.

آرمیتا و باران مشغول یک بازی روی تخته‌سیاه هستند. در ابتدا، باران یک عدد طبیعی دل‌خواه را انتخاب می‌کند و آن را روی تخته‌سیاه می‌نویسد. سپس آرمیتا بازی را شروع می‌کند و بعد از هر یک، نوبت به شخص دیگر می‌رسد. آرمیتا در هر نوبتش می‌تواند به مقدار a یا $2a$ از عدد روی تخته کم کند و عدد حاصل را به جای آن بر روی تخته بنویسد. باران هم در هر حرکت می‌تواند به مقدار b یا $2b$ از عدد روی تخته کم کند و عدد حاصل را جایگزین عدد روی تخته کند. نهایتاً، کسی که عددی کمتر از صفر روی تخته بنویسد، برنده‌ی بازی است. اگر هر دو نفر بهینه عمل کنند، به ازای چند مورد از حالت‌های زیر برای مقدار a و b ، آرمیتا می‌تواند همواره طوری بازی کند که برنده‌ی بازی باشد؟ لازم به ذکر است که بهینه عمل کردن باران، شامل انتخاب او در تعیین عدد اولیه‌ی نوشته‌شده روی تخته‌سیاه نیز می‌شود.

$$(a = 40, b = 40), (a = 30, b = 15), (a = 20, b = 35), (a = 10, b = 4)$$

۴ (۵)

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۰ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

اگر $a < 2b$ باشد، باران در حرکت ابتدایی خود $2a$ را روی تخته می‌نویسد. با انجام این کار، آرمیتا در حرکت اول نمی‌تواند برنده‌ی بازی باشد، چرا که عدد نوشته شده را می‌تواند یا به صفر برساند یا به a . در هر دوی این حالات، با توجه به این که $a < 2b$ ، باران در حرکت بعد عدد را منفی می‌کند و بازی را می‌برد. برعکس، اگر $2b \leq a$ باشد، هر عددی که باران روی تخته بنویسد، باز هم آرمیتا بازی را می‌برد. در این حالت، الگوریتم آرمیتا به شکل زیر می‌تواند تا بازی را ببرد:

- اگر عدد روی تخته از $2a$ کمتر بود، از آن $2a$ کم کن و بازی را ببر.
- در غیر این صورت، از عدد روی تخته a واحد کم کن.

در حرکت بعدی از حالت دوم الگوریتم آرمیتا، باران نمی‌تواند بازی را ببرد، چرا که $2a \leq k$ بنابراین $a \leq k - a$ و چون $2b \leq a$ ، عدد جدید روی تخته از $2b$ بیشتر است و باران نمی‌تواند در این حرکت بازی را ببرد.

□

دو مجموعه‌ی مجزای $S = \{A, B, C, D\}$ و $T = \{1, 2, 3, 4\}$ را در نظر بگیرید. به یک زیرمجموعه از $S \cup T$ زیبا می‌گوییم اگر ۴ عضوی باشد و با هر کدام از دو مجموعه‌ی S و T ، دقیقاً دو عضو مشترک داشته باشد. مثلاً مجموعه‌ی $\{A, D, 2, 3\}$ زیبا است، اما مجموعه‌ی $\{A, B, D, 4\}$ زیبا نیست. می‌خواهیم به هر مجموعه‌ی زیبا، یک رنگ منتسب کنیم با این شرط که به هر دو مجموعه‌ی متمایز زیبا که حداقل دو عضو مشترک دارند، رنگ‌های متفاوتی منتسب شده باشد. به حداقل چند رنگ مختلف برای انجام این کار نیاز داریم؟

۱۸ (۱) ۹ (۲) ۶ (۳) ۳۶ (۴) ۱۵ (۵)

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

رنگ‌آمیزی با ۱۸ رنگ

برای رنگ‌آمیزی مجموعه‌های زیبا با ۱۸ رنگ، کافی است هر مجموعه را با مجموعه‌ای که هیچ عضو مشترکی با آن ندارد، با یک رنگ رنگ‌آمیزی کنیم. به طور مثال، دو مجموعه‌ی $\{A, B, 1, 2\}$ و $\{C, D, 3, 4\}$ را می‌توان با استفاده از یک رنگ مشخص، رنگ‌آمیزی کرد. تعداد کل مجموعه‌های زیبا برابر است با: انتخاب دو عضو از S (که معادل انتخاب دو از چهار است: $\binom{4}{2}$) ضربدر انتخاب دو عضو از T (که آن هم معادل $\binom{4}{2}$ است). پس تعداد کل مجموعه‌های زیبا برابر است با:

$$\binom{4}{2} \times \binom{4}{2} = 6 \times 6 = 36$$

از آنجا که هر رنگ می‌تواند حداکثر برای دو مجموعه‌ی زیبا استفاده شود (زیرا مجموعه‌های زیبا هیچ عضوی مشترک ندارند)، برای رنگ‌آمیزی تمام ۳۶ مجموعه‌ی زیبا، حداقل نصف این تعداد رنگ نیاز است:

$$\frac{36}{2} = 18$$

پس ۱۸ رنگ برای رنگ‌آمیزی کافی است.

اثبات اینکه با کمتر از ۱۸ رنگ نمی‌توان مجموعه‌های زیبا را رنگ‌آمیزی کرد:

برای اثبات این ادعا، نشان می‌دهیم که هیچ سه مجموعه‌ی زیبای مختلف نمی‌توانند همرنگ باشند. برهان خلف می‌گیریم: فرض کنیم سه مجموعه‌ی زیبای همرنگ با نام‌های Z_1, Z_2, Z_3 وجود داشته باشند. بدون از دست دادن کلیت مسئله (به دلیل تقارن)، فرض می‌کنیم:

$$Z_1 = \{A, B, 1, 2\}.$$

حال دو حالت ممکن است برای مجموعه‌ی Z_2 وجود داشته باشد: Z_2 یا هیچ عضو مشترکی با Z_1 ندارد، یا دقیقاً یک عضو مشترک با Z_1 دارد.

• حالت اول: Z_2 هیچ عضو مشترکی با Z_1 ندارد در این صورت:

$$Z_2 = \{C, D, 3, 4\}.$$

اکنون توجه کنید که Z_3 باید عضوی از مجموعه‌های زیبا باشد، یعنی:

$$Z_3 \subseteq Z_1 \cup Z_2 = S \cup T,$$

مرحله‌ی دوم سی و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور- آزمون چندگزینه‌ای

و Z_3 باید چهار عضو داشته باشد. طبق اصل لانه‌ی کبوتری، چون Z_3 چهار عضوی است، مجموعه‌ی Z_3 با حداقل یکی از Z_1 یا Z_2 باید دست‌کم دو عضو مشترک داشته باشد. بنابراین، Z_3 نمی‌تواند با هیچ‌کدام از Z_1 یا Z_2 هم‌رنگ باشد، که یک تناقض است.

- حالت دوم: Z_2 دقیقاً یک عضو مشترک با Z_1 دارد بدون از دست دادن کلیت مسئله (به علت تقارن)، فرض می‌کنیم:

$$Z_2 = \{A, C, ۳, ۴\}.$$

در این حالت، داریم:

$$Z_1 \cup Z_2 = S \cup T - \{D\}.$$

مجموعه‌ی Z_3 نیز باید عضوی از مجموعه‌های زیبا باشد، یعنی Z_3 چهار عضوی است و سه عضو آن به جز D انتخاب می‌شود. بنابراین:

$$Z_3 - \{D\} \subseteq Z_1 \cup Z_2.$$

با توجه به چهار عضوی بودن Z_3 ، طبق اصل لانه‌ی کبوتری، Z_3 با حداقل یکی از Z_1 یا Z_2 حداقل دو عضو مشترک خواهد داشت. بنابراین Z_3 نمی‌تواند با Z_1 یا Z_2 هم‌رنگ باشد، که این نیز تناقض است.

در هر دو حالت، نشان دادیم که سه مجموعه‌ی زیبا نمی‌توانند هم‌رنگ باشند. بنابراین برهان خلف رد می‌شود و ثابت می‌شود که با کمتر از ۱۸ رنگ نمی‌توان این رنگ‌آمیزی را انجام داد.

□

پارمیس و نازلی هر کدام در خانه‌ای از یک جدول 9×9 قرار دارند. پارمیس در پایین‌ترین و چپ‌ترین خانه، و نازلی در بالاترین و راست‌ترین خانه از جدول قرار دارد. هر روز صبح، پارمیس یک سکه می‌اندازد که با احتمال برابر، شیر یا خط می‌آید. اگر سکه شیر آمد، پارمیس از جایی که قرار دارد، یک خانه به سمت بالا می‌رود و نازلی نیز از جایی که قرار دارد، یک خانه به سمت پایین حرکت می‌کند. اگر سکه خط آمد، پارمیس یک خانه به سمت راست، و نازلی یک خانه به سمت چپ می‌رود. سپس، هر دوی آن‌ها در خانه‌ای از جدول که در آن قرار دارند، شب را صبح می‌کنند. این روند تا زمانی ادامه می‌یابد که پارمیس یا نازلی از جدول خارج شوند. احتمال این که نازلی و پارمیس شبی را با هم، در خانه‌ی یکسانی از جدول سپری کنند، چه قدر است؟

$$\frac{63}{256} \quad (5)$$

$$\frac{35}{128} \quad (4)$$

$$\frac{6435}{32768} \quad (3)$$

$$\frac{490}{1287} \quad (2)$$

$$0 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

با کمی بررسی می‌توان دید که همواره خانه‌ای که نازلی و پارمیس در آن قرار دارند، نسبت به هم قرینه‌ی مرکزی است. پس، تنها حالتی که می‌توانند هم‌دیگر را در یک خانه ملاقات کنند، این است که هر دو در خانه‌ی مرکزی جدول شب را سپری کنند. بنابراین، برای حل سؤال کفایت تا احتمال اینکه پارمیس شبی را در خانه‌ی مرکزی سپری کند، محاسبه کنیم.

برای این کار، ۸ حرکت ابتدایی را در نظر می‌گیریم. در این ۸ حرکت، هر بار یا خط می‌آید و یا شیر، پس تعداد کل حالت‌های حرکت پارمیس در ۸ روز اول برابر است با:

$$2^8 = 256.$$

تعداد حالاتی که پارمیس در ۸ حرکت اول به خانه‌ی مرکزی برسد، برابر است با تعداد مسیرهایی در جدول که از خانه‌ی پایین چپ آغاز و به خانه‌ی مرکزی ختم می‌شوند. تعداد این مسیرها برابر است با:

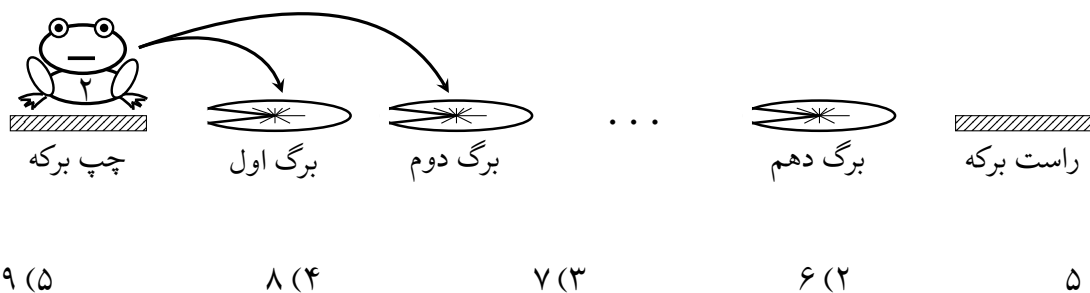
$$\binom{8}{4} = 70.$$

در نتیجه، احتمال اینکه پارمیس و نازلی شبی را در خانه‌ی مرکزی صبح کنند، برابر است با:

$$\frac{70}{256} = \frac{35}{128}.$$

□

روی یک برکه مانند شکل زیر، ۱۰ برگ در یک ردیف، از چپ به راست، در جایگاه‌های ۱ تا ۱۰ قرار دارند. در سمت چپ این برکه، ۱۰ قورباغه با شماره‌های ۱ تا ۱۰ حضور دارند و می‌خواهند با عبور از روی برگ‌ها، به سمت راست برکه بروند که می‌توان آن را جایگاه یازدهم در نظر گرفت. در هر لحظه، حداکثر یک قورباغه می‌تواند روی هر برگ بنشیند، و بعد از جهیدن یک قورباغه از روی برگی که بر آن نشسته، آن برگ به زیر آب می‌رود و دیگر قابل استفاده نیست. هر قورباغه قدرت جهش مخصوص به خود را دارد؛ قورباغه‌ی شماره‌ی i (برای $1 \leq i \leq 10$) می‌تواند در هر حرکت، حداکثر i جایگاه به سمت راست بجهد. مثلاً قورباغه‌ی شماره‌ی ۲، مطابق شکل زیر، می‌تواند در یک حرکت از ابتدای برکه به روی یکی از برگ‌های اول یا دوم بجهد. با توجه به شرایط گفته‌شده، حداکثر چند قورباغه می‌توانند با جهیدن روی برگ‌ها، از برکه رد شوند؟



پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

برای اثبات نیاز به نشان دادن دو نکته وجود دارد: اول اینکه ۷ قورباغه می‌توانند از روی برکه عبور کنند و دوم اینکه ۸ قورباغه نمی‌توانند. عبور ۷ قورباغه به شکل زیر انجام‌پذیر است:

۱. قورباغه چهارم با پرش از روی برگ‌های ۴ و ۸ به سمت راست برکه می‌رسد.
۲. قورباغه پنجم با پرش از روی برگ ۵ به سمت راست برکه می‌رسد.
۳. قورباغه ششم با پرش از روی برگ ۶ به سمت راست برکه می‌رسد.
۴. قورباغه هفتم با پرش از روی برگ ۷ به سمت راست برکه می‌رسد.
۵. قورباغه هشتم با پرش از روی برگ ۳ به سمت راست برکه می‌رسد.
۶. قورباغه نهم با پرش از روی برگ ۲ به سمت راست برکه می‌رسد.
۷. قورباغه دهم با پرش از روی برگ ۱ به سمت راست برکه می‌رسد.

برای نشان دادن اینکه ۸ قورباغه نمی‌توانند به سمت راست برکه برسند، کافی است توجه کنیم که هر قورباغه باید از روی حداقل چند برگ بجهد.

- قورباغه‌های دهم تا ششم باید از روی یک برگ بجهند.
- قورباغه‌های پنجم و چهارم باید از روی دو برگ بجهند.
- قورباغه‌ی سوم باید از روی سه برگ بجهد.
- قورباغه‌ی دوم باید از روی پنج برگ بجهد.
- قورباغه‌ی اول باید از روی همه‌ی ۱۰ برگ بجهد.

مرحله‌ی دوم سی و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور- آزمون چندگزینه‌ای

حال برهان خلف می‌گیریم که ۸ قورباغه به سمت راست برکه رسیده‌اند. بنابراین برای رسیدن این ۸ قورباغه به سمت راست برکه، حداقل تعداد برگ‌های به زیر آب رفته به صورت زیر است:

$$۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۲ + ۲ + ۳ = ۱۲$$

با این حال ما تنها ۱۰ برگ داریم و در نتیجه برهان خلف رد می‌شود. ثابت می‌شود که حداکثر ۷ قورباغه می‌توانند از روی برکه عبور کنند.

□

سهیل دنباله‌ی ۴۲ عضوی سیوناچی را به صورت زیر تعریف کرده است:

$$s_1 = 37, s_2 = 42, s_3 = 84, s_4 = 24, s_5 = 41 \quad \bullet \text{ عضو اول دنباله عبارت‌اند از:}$$

$$s_n = s_{n-1} + s_{n-2} + s_{n-3} + s_{n-4} + s_{n-5} \quad \bullet \text{ به ازای } 5 < n \leq 42 \text{ داریم:}$$

او یک بازه (تعدادی عضو متوالی) از دنباله را عجیب می‌داند، اگر حاصل جمع اعضای آن بازه عددی فرد باشد. مثلاً بازه‌ی $\langle s_3, s_4, s_5 \rangle$ عجیب است چون جمع اعضایش عددی فرد می‌شود، ولی $\langle s_2, s_3 \rangle$ عجیب نیست چون حاصل جمع اعضایش فرد نمی‌باشد. دنباله‌ی ۴۲ عضوی سیوناچی، چند بازه‌ی عجیب دارد؟

$$392 \text{ (۱)} \quad 400 \text{ (۲)} \quad 420 \text{ (۳)} \quad 448 \text{ (۴)} \quad 462 \text{ (۵)}$$

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

به راحتی می‌توان مشاهده کرد که از هر عدد فقط زوجیت آن مهم است. برای حل این مسئله، دنباله‌ی p را به عنوان جمع پیشوندهای s تعریف می‌کنیم. یعنی:

$$p_i = s_1 + s_2 + \dots + s_i.$$

بنابراین، جمع بازه‌ی l تا r برابر است با:

$$p_r - p_{l-1}.$$

این عبارت زمانی فرد می‌شود که زوجیت p_r با زوجیت p_{l-1} متفاوت باشد؛ به عبارت دیگر، باید تعداد جفت‌های i و j را بشماریم که $0 \leq i < j \leq 42$ برقرار باشد و زوجیت p_j و p_i متفاوت باشد. در واقع، ما بازه‌ی l تا r را با 1 و $i = l - 1$ و $j = r$ متناظر کردیم.

محاسبه‌ی زوجیت دنباله‌ها

اگر زوجیت ۱۲ عضو اول این دو دنباله را بنویسیم، به دنباله‌های زیر می‌رسیم:

$$s = \{1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0\}$$

$$p = \{1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0\}$$

همانطور که مشاهده می‌کنید، با دوره تناوب ۶، این دو دنباله تکرار می‌شوند. در دنباله‌ی p ، از هر ۶ عدد، ۴ تایشان ۱ هستند.

بنابراین در ۴۲ عضو اول دنباله‌ی p ، تعداد ۱ ها برابر است با:

$$42 \times \frac{4}{6} = 28.$$

همچنین تعداد ۰ ها با احتساب $p_0 = 0$ برابر با:

$$43 - 28 = 15.$$

در نتیجه جواب سوال حاصل ضرب تعداد صفرها و یک‌ها است که:

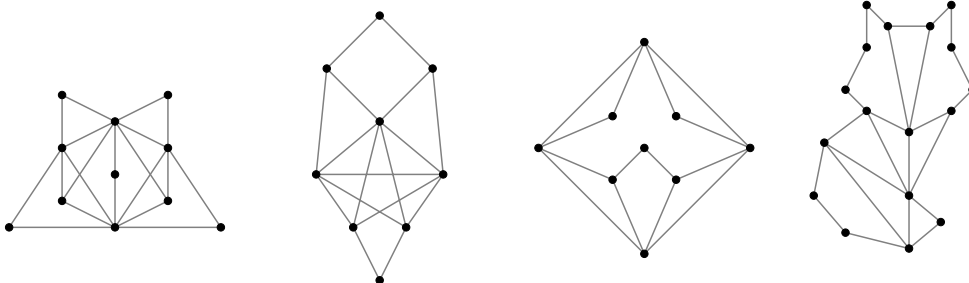
$$28 \times 15 = 420$$

مرحله‌ی دوم سی و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور- آزمون چندگزینه‌ای

می‌شود.



زهرای برای رسم یک گراف، در ابتدا تنها یک رأس می‌گذارد و بعد از آن در هر مرحله، یک رأس جدید به گراف فعلی اضافه می‌کند و از رأس اضافه‌شده، حداکثر دو یال به رأس‌های دیگر می‌کشد. زهرا از میان چهار گراف همبند زیر، چند مورد را می‌تواند به‌روش خود رسم کند؟



۴ (۵)

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۰ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

شرط امکان‌پذیری ساخت گراف G توسط زهرا:

زهرا می‌تواند یک گراف (G) را رسم کند، اگر و تنها اگر با اعمال عکس الگوریتم تعیین‌شده روی G ، بتوان با تعدادی مرحله، گراف را به گراف تهی تبدیل کرد. به عبارت دیگر، در هر مرحله یک رأس که حداکثر به دو رأس دیگر یال دارد (یعنی درجه‌ی آن حداکثر ۲ است) را به همراه یال‌های متصل به آن حذف می‌کنیم. اگر در طی این مراحل به وضعیتی برسیم که هیچ رأسی با این ویژگی وجود نداشته باشد (یعنی همه‌ی رأس‌ها درجه‌ی بیشتر مساوی ۳ داشته باشند)، G را نمی‌توان با الگوریتم زهرا رسم کرد. در غیر این صورت، اگر پس از تعدادی مرحله گراف به تهی برسد، G توسط زهرا قابل رسم خواهد بود.

اثبات:

برای اثبات این ادعا، دو حالت ممکن را بررسی می‌کنیم:

• حالت اول: گراف به تهی تبدیل می‌شود

در این حالت، اگر زهرا مراحل حذف رأس‌ها را به ترتیب معکوس انجام دهد، می‌تواند به گراف G بازگردد. بنابراین گراف G قابل ساخت است.

• حالت دوم: حداقل یک گراف میانی وجود دارد که همه‌ی رأس‌ها درجه‌ی بزرگ‌تر یا مساوی ۳ دارند

فرض کنیم با انجام مراحل حذف، به گرافی برسیم که درجه‌ی همه‌ی رأس‌های آن حداقل برابر ۳ باشد. چنین گرافی را F می‌نامیم. حال نشان می‌دهیم که در این شرایط، G قابل ساخت نیست.

برهان خلف:

فرض کنیم زهرا بتواند G را رسم کند. از بین رأس‌های گراف F ، آخرین رأسی که زهرا رسم کرده است را در نظر بگیرید. این رأس، براساس الگوریتم زهرا، می‌تواند حداکثر به دو رأس دیگر متصل باشد (زیرا پیش از این حذف شده). اما طبق فرض، درجه‌ی این رأس حداقل برابر ۳ است. این تناقض نشان می‌دهد که فرض ابتدا اشتباه بوده است. بنابراین G قابل ترسیم نیست.

مرحله‌ی دوم سی و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور- آزمون چندگزینه‌ای

گراف‌هایی که با انجام فرایند تعیین شده به گراف تهی تبدیل شوند، قابل ساخت هستند. در مورد سایر گراف‌ها (که حداقل یک گراف میانی با همه‌ی رأس‌هایی با درجه‌ی ≥ 3 داشته باشند)، چنین ساختی امکان‌پذیر نیست. با توجه به این فرایند، از بین گراف‌های داده‌شده، گراف اول و دوم (از راست) قابل تبدیل به گراف تهی هستند و بنابراین قابل رسم هستند. دو گراف دیگر، با این الگوریتم، نمی‌توانند به تهی تبدیل شوند و زهرا نمی‌تواند آن‌ها را بسازد.

□

استاد شیفو می‌خواهد یک برنامه‌ی تمرینی ۱۲ ساعته برای تقویت عضلات دست و پا طراحی کند. این برنامه به‌صورت دنباله‌ای از بلوک‌های تمرینی است. هر بلوک تمرینی، یا مربوط به ورزش دست است یا ورزش پا، و مدت زمان آن نیز بر حسب ساعت، عددی طبیعی است. مثلاً یک بلوک تمرینی می‌تواند از ۳ ساعت تمرین پا تشکیل شده باشد. استاد شیفو به این نتیجه رسیده است که یک برنامه‌ی تمرینی مناسب، دارای شرایط زیر است:

- بلوک‌های تمرینی باید به‌شکل یکی‌درمیان، مربوط به ورزش دست و ورزش پا باشند.
- اولین بلوک تمرینی باید مربوط به ورزش دست باشد.
- آخرین بلوک تمرینی باید مربوط به ورزش پا باشد.
- یک بلوک تمرینی ورزش پا، نباید از بلوک تمرینی قبل از آن، مدت زمان بیشتری داشته باشد.

شکل زیر نمونه‌ای از یک برنامه‌ی تمرینی با شرایط مذکور را نشان می‌دهد. چند برنامه‌ی تمرینی ۱۲ ساعته وجود دارد که از نظر استاد شیفو مناسب باشد؟ دو برنامه‌ی تمرینی، متمایز محسوب می‌شوند اگر زمانی (در طول ۱۲ ساعت) وجود داشته باشد که در یک برنامه، برای آن زمان، ورزش دست تعیین شده باشد، و در برنامه‌ی دیگر، برای آن زمان، ورزش پا تعیین شده باشد.

۳ ساعت پا	۵ ساعت دست	۲ ساعت پا	۲ ساعت دست
بلوک چهارم	بلوک سوم	بلوک دوم	بلوک اول

۱۴۴ (۵)

۲۸۴ (۴)

۲۸۶ (۳)

۱۲۳ (۲)

۱۵۵ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

$f(n)$ را تعداد روش‌های ساخت یک برنامه‌ی تمرینی n ساعته تعریف می‌کنیم. با حالت‌بندی روی مجموع طول دو بلوک تمرینی اول به بازگشتی زیر می‌رسیم:

$$f(n) = \sum_{k=2}^n f(n-k) \cdot \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$$

چرا که اگر مجموع طول دو بازه‌ی اول k باشد، از آنجایی که بلوک اول باید بزرگ‌تر یا مساوی بلوک دوم باشد، $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$ حالت برای مشخص کردن طولشان وجود دارد. باقی برنامه‌ی تمرینی نیز دارای $f(n-k)$ حالت است. به‌طور مشابه می‌دانیم:

$$f(n-1) = \sum_{k=2}^{n-1} f(n-1-k) \cdot \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$$

بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2) + f(n-4) + f(n-6) + f(n-8) + \dots$$

مرحله‌ی دوم سی و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور- آزمون چندگزینه‌ای

اگر با استفاده از این ارتباط $f(n-2)$ را بنویسیم، داریم:

$$f(n-2) = f(n-3) + f(n-4) + f(n-6) + f(n-8) + \dots$$

پس به نتیجه می‌رسیم که:

$$f(n) = f(n-1) + 2f(n-2) - f(n-3)$$

و همچنین داریم:

$$f(1) = 0, \quad f(2) = 1, \quad f(3) = 1$$

با استفاده از رابطه‌ی بازگشتی به دست آمده، $f(12)$ را به شکل زیر محاسبه می‌کنیم:

$$f = 0, 1, 1, 3, 4, 9, 14, 28, 47, 89, 155, 286.$$

□

یک عدد صحیح نامنفی را زیبا می‌نامیم اگر هم مضرب ۳ باشد و هم در نمایش دودویی آن، دو رقم یک متوالی وجود نداشته باشد. مثلاً عدد ۹ زیبا است چون هم مضربی از ۳ است و هم در نمایش دودویی آن (۱۰۰۱)، هیچ دو رقم یکی مجاور نیستند. چند عدد زیبا در بازه‌ی $[0, 1023]$ (شامل خود ۰ و ۱۰۲۳) وجود دارد؟

(۱) ۴۸ (۲) ۵۴ (۳) ۳۸ (۴) ۴۶ (۵) ۳۰

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

تعداد اعداد n بیتی (۰ تا $2^n - 1$) که زیبا هستند را $f(n)$ می‌نامیم. رابطه‌ای بازگشتی برای $f(n)$ به دست می‌آوریم.

برای محاسبه‌ی تعداد اعداد زیبای n بیتی، ابتدا $n - 2$ بیت اول را طوری مقداردهی می‌کنیم که دو بیت پشت سر هم ۱ نداشته باشند، سپس ۲ بیت آخر را طوری مقداردهی می‌کنیم که عدد حاصل به ۳ بخش‌پذیر باشد. باقی‌مانده‌ی دو بیت آخر به ۳، با مشخص شدن سایر $n - 2$ بیت تعیین می‌شود.

- اگر باقی‌مانده‌ی آن‌ها می‌بایست ۰ می‌بود، این دو بیت باید ۰۰ باشند (اگر ۱۱ باشند دو بیت یک پشت سر هم داریم). - اگر باقی‌مانده‌ی آن‌ها می‌بایست ۱ می‌بود، این دو بیت باید ۰۱ باشند. - اگر باقی‌مانده‌ی آن‌ها می‌بایست ۲ می‌بود، این دو بیت باید ۱۰ باشند.

در این حالت اگر بیت قبلی ۱ باشد، عدد حاصل زیبا نیست و باید تعداد این حالات را با استفاده از اصل متمم کم کنیم. در این حالت ۴ بیت آخر عدد به شکل ۰۱۱۰ است که چون باقی‌مانده بر ۳ آن صفر است، $n - 4$ بیت قبلی تشکیل یک عدد زیبا می‌دهند. پس تعداد این حالات برابر با $f(n - 4)$ است.

اگر تعداد روش‌هایی که می‌توان n بیت را با صفر و یک مقداردهی کرد که دو بیت پشت سر هم ۱ نداشته باشد را $g(n)$ بنامیم، برای به دست آوردن مقدار $g(n)$ ، کافی است مقدار بیت آخر را مشخص کنیم. اگر برابر با ۰ باشد، بقیه‌ی بیت‌ها به $g(n - 1)$ حالت و اگر برابر با ۱ باشد، بیت بعدی باید برابر با ۰ و بقیه‌ی بیت‌ها به $g(n - 2)$ حالت انتخاب شوند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$g(n) = g(n - 1) + g(n - 2) \quad : g(0) = 1, g(1) = 2 \text{ با شرایط اولیه:}$$

که برابر است با:

$$g(n) = Fib(n + 1) \quad \text{با } Fib(0) = Fib(1) = 1$$

حال برای به دست آوردن $f(n)$ طبق بررسی‌های بالا داریم:

$$f(n) = g(n - 2) - f(n - 4) = Fib(n - 1) - f(n - 4)$$

با شرایط اولیه:

$$f(0) = f(1) = f(2) = 1, f(3) = 2$$

و برای مقادیر بیشتر:

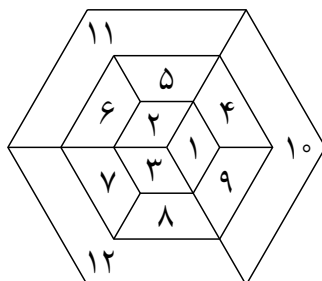
مرحله‌ی دوم سی و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور- آزمون چندگزینه‌ای

$$f(4) = 2, f(5) = 4, f(6) = 7, f(7) = 11, f(8) = 19, f(9) = 30, f(10) = 48$$

در نتیجه، از آن‌جا که $1 - 2^{10} = 1023$ ، پاسخ مسئله برابر با $f(10) = 48$ است.

□

سارا می‌خواهد هر یک از ۱۲ ناحیه‌ی شکل زیر را با یکی از سه رنگ آبی، قرمز و سبز رنگ‌آمیزی کند، با این شرط که هر دو ناحیه‌ای که با هم ضلع مشترک دارند، رنگ‌های متفاوتی داشته باشند. او به چند روش می‌تواند این رنگ‌آمیزی را انجام دهد؟ دو روش رنگ‌آمیزی متفاوت محسوب می‌شوند اگر ناحیه‌ای وجود داشته باشد که در این دو روش، رنگ متفاوتی داشته باشد.



۳۶ (۵)

۳۰ (۴)

۵ (۳)

۲۴ (۲)

۸ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

ابتدا سه ناحیه‌ی ۱، ۲ و ۳ را رنگ‌آمیزی می‌کنیم. چون این سه ناحیه دو به دو با هم ضلع مشترک دارند، باید به سه رنگ مختلف رنگ شوند. بنابراین برای رنگ‌آمیزی این سه، ۳! روش داریم. بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرض کنید ناحیه‌ی ۱ آبی، ناحیه‌ی ۲ قرمز و ناحیه‌ی ۳ سبز باشد. ناحیه‌ی ۵ می‌تواند یکی از دو رنگ سبز یا آبی باشد. روی رنگ این ناحیه حالت‌بندی می‌کنیم:

- اگر این ناحیه سبز باشد، بقیه‌ی ناحیه‌ها به شکل یکتا مشخص می‌شوند. پس در کل این حالت ۱ روش دارد.
- اگر این ناحیه آبی باشد، ناحیه‌ی ۴ می‌تواند سبز یا قرمز باشد.

- اگر ناحیه‌ی ۴ سبز باشد، بقیه‌ی ناحیه‌ها به شکل یکتا مشخص می‌شوند.

- اگر ناحیه‌ی ۴ قرمز باشد، ناحیه‌های ۶ و ۹ باید سبز باشند. بنابراین دو ناحیه‌ی ۷ و ۸ باید یا آبی یا قرمز باشند. پس برای رنگ‌آمیزی این دو، ۲ حالت وجود دارد.

در کل این حالت ۳ روش دارد.

اگر خانه‌های ۱ تا ۹ را رنگ‌آمیزی کنیم، سه خانه‌ی ۱۰، ۱۱ و ۱۲ به طور یکتا مشخص می‌شوند. پس در کل $24 = (1 + 2) \times 3$ روش وجود دارد.

□

سروش و بهرام روی یک جدول 4×4 بازی می‌کنند. در ابتدا، بهرام ۴ خانه‌ی متمایز را از جدول انتخاب می‌کند و هر یک از اعداد ۱ تا ۴ را در یکی از آن خانه‌ها پنهان می‌کند. سروش که از انتخاب بهرام خبر ندارد، می‌خواهد با تعدادی پرسش، مکان هر ۴ خانه‌ی انتخابی بهرام را به‌همراه عددشان پیدا کند. سروش در هر پرسش می‌تواند یک زیرجدول را مشخص کند تا بهرام در پاسخ بگوید چه اعدادی در این زیرجدول وجود دارند (بدون اشاره به جایی که هر عدد پنهان شده است). یک زیرجدول، جدولی ناتهی است که از اشتراک تعدادی سطر متوالی و تعدادی ستون متوالی از جدول اصلی حاصل می‌شود. سروش حداقل به چند پرسش نیاز دارد تا تحت هر شرایطی بتواند به هدفش برسد؟

۷ (۵)

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

اثبات نیاز به حداقل ۴ پرسش:

ابتدا نشان می‌دهیم که به حداقل ۴ پرسش نیاز داریم. فرض کنید هدف، پیدا کردن بمب شماره ۱ است. از آنجایی که جدول شامل ۱۶ خانه است و با هر پرسش کاندیدها به دو دسته تقسیم می‌شوند، برای شناسایی بمب حداقل به تعداد زیر پرسش نیاز داریم:

$$\log_2(16) = 4$$

اثبات شناسایی مکان بمب‌ها با ۴ پرسش:

حال نشان می‌دهیم با ۴ پرسش می‌توانیم مکان هر تعداد از بمب‌ها را پیدا کنیم. اگر یک‌بار دو سطر اول را بپرسیم و یک‌بار دو سطر وسط را، می‌توان شماره سطر همه بمب‌ها را تشخیص داد، زیرا وضعیت هر ۴ سطر در این دو پرسش به طور یکتا مشخص می‌شود. به طور مشخص:

- برای سطر اول، فقط جواب پرسش اول تأیید می‌شود.
- برای سطر دوم، هر دو پرسش تأیید می‌شود.
- برای سطر سوم، فقط پرسش دوم تأیید می‌شود.
- و برای سطر چهارم، هیچکدام از پرسش‌ها تأیید نمی‌شود.

با تکرار همین روش برای ستون‌ها، می‌توان شماره ستون همه بمب‌ها را نیز تشخیص داد. بنابراین با ۴ پرسش به هدف می‌رسیم. $\square$

برای دنباله‌ی دودویی $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ ، عدد طبیعی $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ ، مشکل ساز نامیده می‌شود اگر دنباله‌ی متشکل از i عنصر اول A با دنباله‌ی متشکل از i عنصر آخر A برابر باشد. به بیان دقیق‌تر، عدد i زمانی برای دنباله مشکل ساز است که $\langle a_1, \dots, a_i \rangle = \langle a_{n-i+1}, \dots, a_n \rangle$. یک دنباله‌ی دودویی را بی‌اشکال می‌نامیم اگر هیچ عددی برای آن مشکل ساز نباشد. چند دنباله‌ی دودویی بی‌اشکال متمایز به ازای $n = 12$ وجود دارد؟

(۱) ۱۱۱۶ (۲) ۶۴ (۳) ۲۰۴۸ (۴) ۵۶۸ (۵) ۲۹۸۰

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

در ابتدا نشان می‌دهیم اگر دنباله‌ای مشکل دار باشد، برای آن یک عدد $i \leq \frac{n}{2}$ مشکل ایجاد می‌کند. اگر برهان خلف بگیریم که یک دنباله‌ی دو دویی داریم که کوچک‌ترین عدد i که برای آن مشکل ایجاد می‌کند بیشتر مساوی از $\frac{n}{2}$ باشد، آن کوچک‌ترین i را در نظر می‌گیریم. با توجه به این که

$$\langle a_1, \dots, a_i \rangle = \langle a_{n-i+1}, \dots, a_n \rangle$$

یعنی هر بیت با بیت $n-i$ تا جلوتر از خود برابر است. بنابراین هر بیت با بیت $(n-i)$ تا جلوتر از خود نیز برابر است. از این رو،

$$n - (2(n-i)) = 2i - n$$

هم برای دنباله مشکل ساز است و این عدد از i کوچک‌تر است. بنابراین، کوچک‌ترین عدد مشکل ساز i نمی‌تواند باشد و برهان خلف رد می‌شود. از این رو ثابت می‌شود که کوچک‌ترین i مشکل ساز از $\frac{n}{2}$ کوچک‌تر یا مساوی است.

اکنون $f(n)$ را به عنوان تعداد دنباله‌های بی‌اشکال n عضوی در نظر می‌گیریم. برای n های فرد، داریم:

$$f(n) = 2f(n-1)$$

چرا که عضو وسط دنباله هیچگاه مشکلی ایجاد نمی‌کند و می‌تواند صفر یا یک باشد. برای n های زوج، اگر دو عضو وسط را حذف کنیم، به دنباله‌ای می‌رسیم که باید بی‌اشکال باشد؛ بنابراین، تعداد حالت‌ها برابر با $f(n-2)$ است. با توجه به چهار حالت مختلف برای دو بیت وسط، به رابطه زیر می‌رسیم:

$$f(n) = 4f(n-2)$$

اکنون در این $4f(n-2)$ تعدادی حالت وجود دارند که بی‌اشکال نیستند و $i = \frac{n}{2}$ برای آن‌ها مشکل ایجاد می‌کند، اما هیچ i کوچک‌تری نمی‌تواند مشکل ایجاد کند. در این حالات، نیمه‌ی اول با نیمه‌ی دوم دنباله برابر است و نیمه‌ی اول باید دنباله‌ای بی‌اشکال باشد. بنابراین، تعداد این دنباله‌ها برابر با:

$$f\left(\frac{n}{2}\right)$$

بنابراین برای n زوج خواهیم داشت:

$$f(n) = 4f(n-2) - f\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$f(1) = 2,$$

$$f(2) = 2,$$

$$f(3) = 4,$$

$$f(4) = 6,$$

$$f(5) = 12,$$

$$f(6) = 20,$$

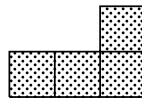
$$f(8) = 74,$$

$$f(10) = 284,$$

$$f(12) = 1116.$$

□

امیرمحمد یک جدول 5×5 دارد. او می‌خواهد یکی از ۲۵ خانه‌ی این جدول را حذف کند، و باقی خانه‌های جدول را با ۶ قطعه به‌شکل زیر بپوشاند، با این شرط که هر یک از ۲۴ خانه‌ی باقی‌مانده از جدول، توسط دقیقاً یک قطعه پوشانده شده باشد. او می‌تواند قبل از قرار دادن یک قطعه در جدول، آن را به‌میزان دل‌خواه، دوران یا تقارن دهد. چند خانه از این جدول هستند که امیرمحمد می‌تواند با حذف آن خانه، باقی خانه‌های جدول را با شرایط گفته‌شده بپوشاند؟



۹ (۵)

۸ (۴)

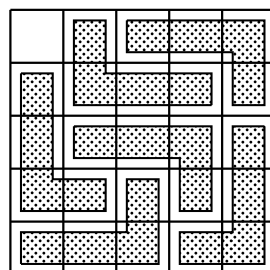
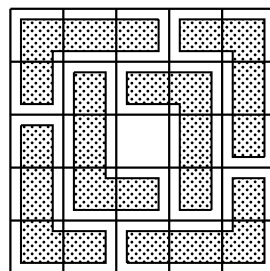
۵ (۳)

۴ (۲)

۱ (۱)

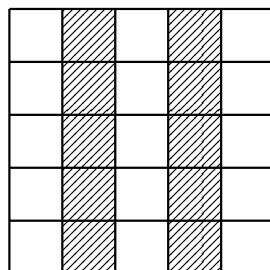
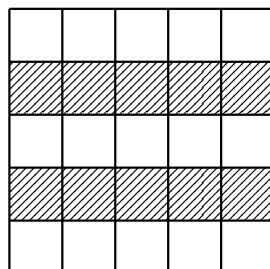
پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

برای ۵ تا از حالات، این کار ممکن است که این حالات را در دو شکل زیر می‌بینید. توجه کنید که شکل دوم معادل ۴ حالت است، چرا که اگر شکل را دوران دهیم، می‌توانیم ببینیم که همه‌ی ۴ گوشه جزو حالات مناسب هستند.

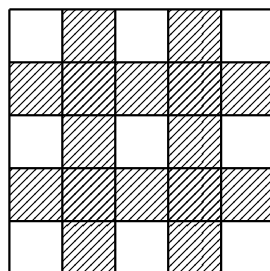


مرحله‌ی دوم سی و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور- آزمون چندگزینه‌ای

برای اثبات اینکه باقی خانه‌ها مناسب نیستند، از دو رنگ‌آمیزی زیر استفاده می‌کنیم.

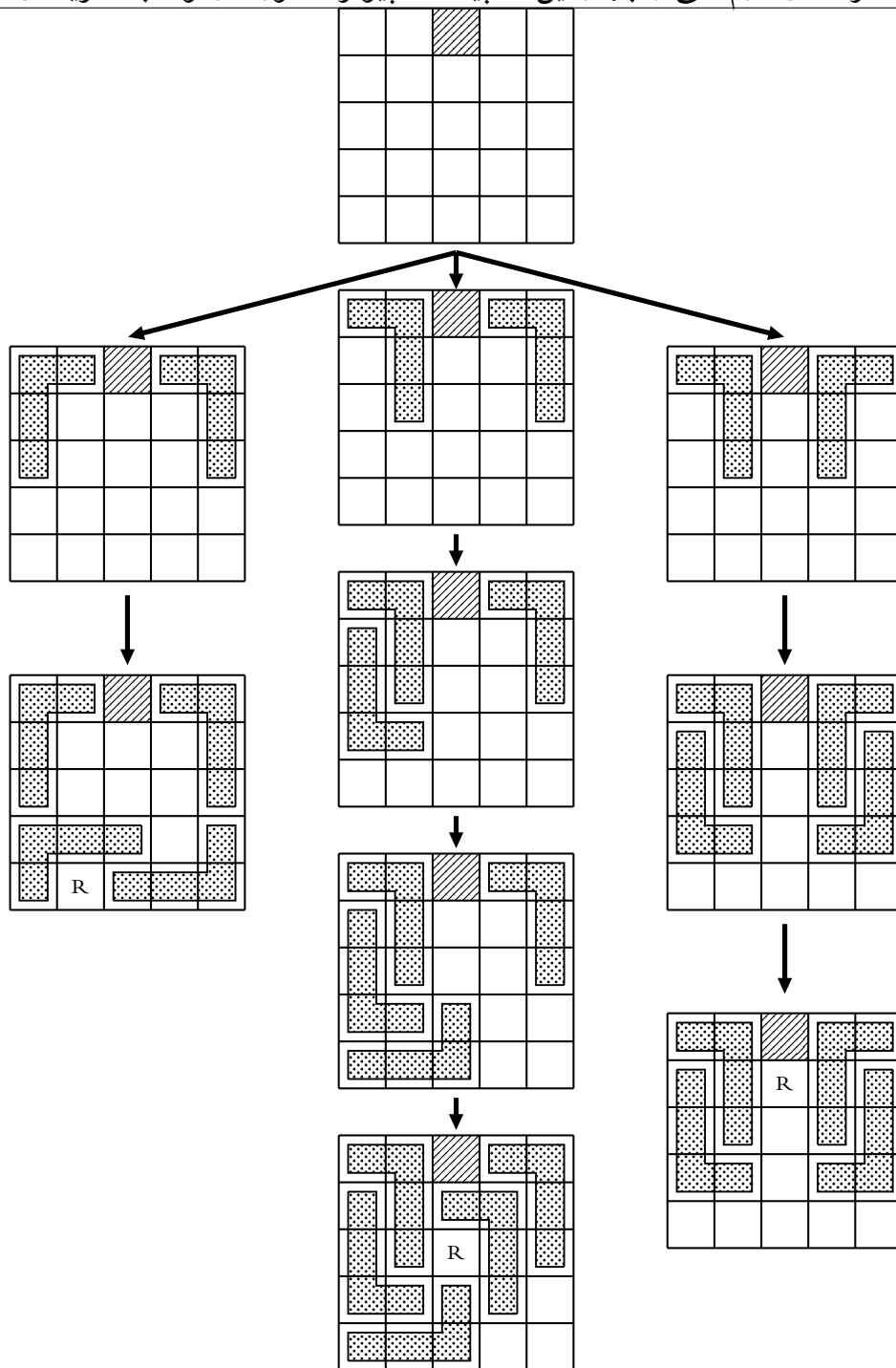


در این دو رنگ‌آمیزی، هر قطعه فرد خانه از خانه‌های هاشورخورده را می‌پوشاند. بنابراین، بعد از گذاشتن ۶ قطعه، همه‌ی خانه‌های هاشورخورده باید پوشیده شده باشند. پس خانه‌ی باقی‌مانده نباید در خانه‌های هاشورخورده‌ی اجتماع این دو طرح (که به شکل زیر است) باشد.



تنها خانه‌ی باقی‌مانده که باید ثابت کنیم امکان‌پذیر نیست، خانه‌ی وسط ضلع است. برای این کار از حالت‌بندی زیر استفاده می‌کنیم. حالت‌هایی که به تقارن معادل شکل‌های کشیده‌شده هستند، حذف شده‌اند. در همه‌ی این شکل‌ها، خانه‌ای که با علامت R مشخص شده‌است، نمی‌تواند در هیچ قطعه‌ای قرار بگیرد و بنابراین آن حالت به جواب نمی‌رسد. خانه‌ی هاشورخورده‌ی بالای شکل، خانه‌ی اولی است که حذف می‌شود.

مرحله‌ی دوم سی و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور- آزمون چندگزینه‌ای



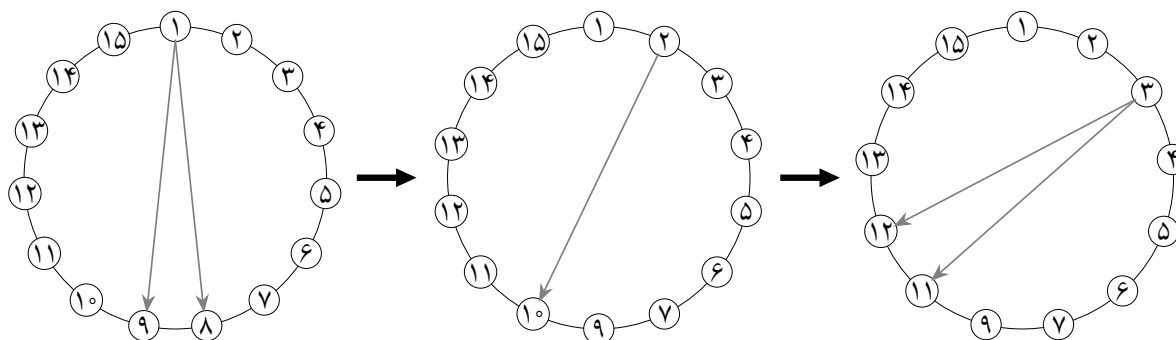
□

۱۵ نفر با شماره‌های ۱ تا ۱۵، مانند دایره‌ی سمت چپ شکل زیر، با فاصله‌های یک‌نواخت، به ترتیب ساعت‌گرد دور یک دایره ایستاده‌اند تا مراسم ویژه‌ای را اجرا کنند. این مراسم از تعدادی مرحله تشکیل شده است و در هر مرحله‌ی آن، کسی که نوبتش است (با شروع از فرد شماره‌ی ۱ در نخستین مرحله)، به صورت زیر عمل می‌کند:

- اگر تعداد افراد دور دایره زوج باشد، فردی را که در آن مرحله، در جایگاه روبه‌روی قطری او در دایره ایستاده است، نشانه گرفته و به او شلیک می‌کند.
- اگر تعداد افراد دور دایره فرد باشد، از دو نفری که در آن مرحله، در جایگاه‌های روبه‌روی قطری اش در دایره قرار دارند، یک نفر را به تصادف (با احتمال یکسان) نشانه گرفته و به او شلیک می‌کند.

پس از این حرکت، کسی که به او شلیک شده، از دور خارج می‌شود و در ادامه، افراد باقی‌مانده جایگاه‌های خود را مجدداً طوری در دایره تنظیم می‌کنند که با فاصله‌های یک‌نواخت دور آن قرار گرفته باشند. سپس برای مرحله‌ی بعدی، نوبت به کسی می‌رسد که در آن لحظه، بعد از فرد شلیک‌کننده در دایره (در جهت ساعت‌گرد) قرار دارد. این مراسم تا زمانی ادامه پیدا می‌کند که تنها یک نفر دور دایره باقی مانده باشد. چه افرادی این شانس را دارند که آخرین فرد باقی‌مانده در پایان مراسم باشند؟

در شکل زیر، مثالی از مراحل ابتدایی اجرای این مراسم نشان داده شده است. در مرحله‌ی اول این مثال، فرد شماره‌ی ۱ از میان افراد با شماره‌های ۸ و ۹ که در جایگاه‌های روبه‌روی قطری او هستند، به تصادف، فرد شماره‌ی ۸ را انتخاب، و به او شلیک می‌کند تا از دور خارج شود. در مرحله‌ی بعد، نوبت به شلیک فرد شماره‌ی ۲ می‌رسد، که با توجه به زوج بودن تعداد افراد حاضر، به فرد شماره‌ی ۱۰ شلیک می‌کند. سپس، نوبت به فرد شماره‌ی ۳ می‌رسد که باید به یکی از افراد با شماره‌های ۱۱ یا ۱۲ شلیک کند.

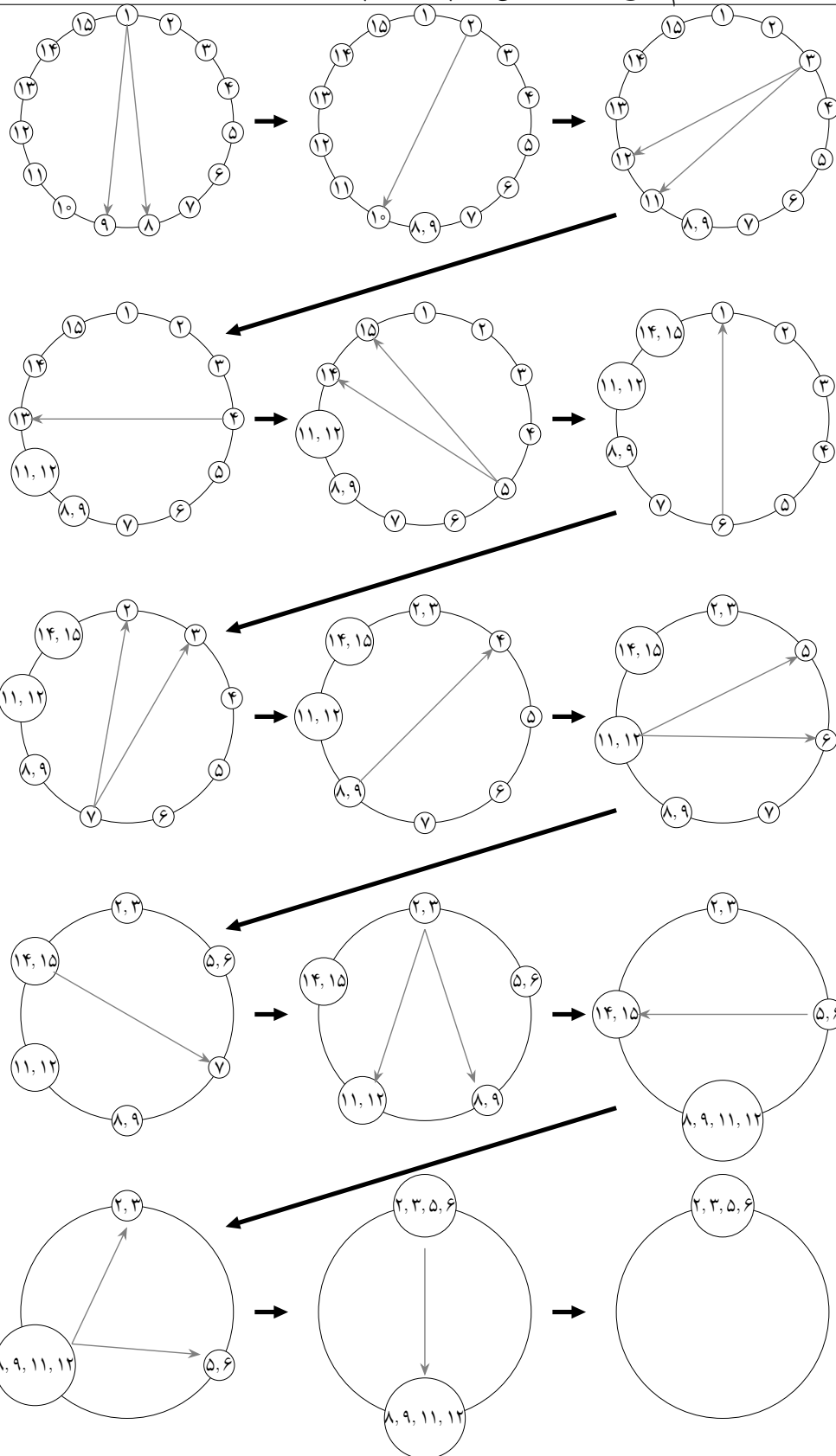


(۱) {۲, ۳, ۵, ۶} (۲) {۸, ۹, ۱۱, ۱۲} (۳) {۲, ۳, ۴, ۵, ۶} (۴) {۸, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲} (۵) {۳, ۵, ۶}

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

در این سوال زمانی که دو نفر (برای حالت‌هایی که فرد دور دایره هستند) ممکن است کشته شوند، چون این دو نفر کنار هم هستند و دقیقاً یکی از آن‌ها زنده می‌ماند، این دو نفر را با هم ترکیب می‌کنیم. به این صورت که یک فرد جدید ایجاد می‌کنیم که می‌تواند هر کدام از دو نفر قبلی باشد و اسم دو نفر قبل را روی نفر جدید می‌نویسیم. اگر تعداد افراد دور دایره زوج باشد، فرد رو به روی فرد شلیک‌کننده کشته خواهد شد و ما آن را در دایره حذف می‌کنیم. مراحل انجام این کار در شکل‌های زیر کشیده شده است. مثلاً در مرحله‌ی اول فرد ۸ و ۹ با هم ترکیب میشوند.

مرحله‌ی دوم سی و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور- آزمون چندگزینه‌ای



□

یک جدول 6×6 را در نظر بگیرید که در هر خانه‌ی آن، یک دانش‌آموز کلاس اول، دوم یا سوم ایستاده است. به مجموعه‌ی دانش‌آموزان هم‌سطر یا هم‌ستون یک دانش‌آموز (به‌غیر از خودش)، سیطره‌ی دید آن دانش‌آموز گفته می‌شود. پس سیطره‌ی دید هر دانش‌آموز، مجموعه‌ای ۱۰ عضوی است.

_____ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید _____

اگر در سیطره‌ی دید هر دانش‌آموز کلاس اولی، حداقل یک دانش‌آموز کلاس دومی، و در سیطره‌ی دید هر دانش‌آموز کلاس دومی، حداقل یک دانش‌آموز کلاس سومی باشد، حداکثر چند دانش‌آموز کلاس اولی می‌تواند در جدول وجود داشته باشد؟

۲۵ (۵)

۱۸ (۴)

۳۵ (۳)

۳۰ (۲)

۲۹ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

ابتدا با استفاده از برهان خلف اثبات می‌کنیم که جواب از ۲۹ بیش‌تر نیست. فرض می‌کنیم حداقل ۳۰ کلاس اولی داشته باشیم و روی تعداد کلاس دومی‌ها حالت‌بندی می‌کنیم:

- **تعداد کلاس دومی‌ها ۶ باشد:** در این حالت، جدول نمی‌تواند هیچ کلاس سومی داشته باشد، زیرا تمام خانه‌ها یا کلاس اولی هستند یا کلاس دومی. بنابراین کلاس دومی‌ها نمی‌توانند وجود داشته باشند، که تناقض است.

- **تعداد کلاس دومی‌ها ۵ باشد:** اگر تعداد کلاس دومی‌ها برابر ۵ باشد، یک سطر و یک ستون وجود دارد که هیچ‌کدام از آن‌ها کلاس دومی ندارند. تقاطع این سطر و ستون نمی‌تواند کلاس اولی باشد (زیرا همه خانه‌های این دو شامل کلاس اولی‌اند)، پس این خانه حتماً باید کلاس سومی باشد. اما در این حالت، بقیه‌ی جدول نمی‌تواند کلاس سومی دیگری داشته باشد (زیرا شرط مسئله نقض می‌شود)، ولی تعدادی کلاس دومی وجود دارند که این کلاس سومی را نمی‌بینند. این تناقض است.

- **تعداد کلاس دومی‌ها ۴ باشد:** در این حالت، دو سطر و دو ستون وجود دارند که هیچ‌کدام کلاس دومی ندارند. ۴ خانه‌ای که از تقاطع این دو سطر و دو ستون حاصل می‌شوند، حتماً باید کلاس سومی باشند. بنابراین در مجموع حداقل ۸ کلاس دومی یا سومی در جدول وجود دارند. پس نمی‌توان ۳۰ کلاس اولی داشت، زیرا مجموع کلاس‌ها از ۳۶ بیش‌تر می‌شود.

- **تعداد کلاس دومی‌ها حداکثر ۳ باشد:** در این حالت، همانند حالت قبل، حداقل ۹ خانه در جدول باید کلاس سومی باشند. بنابراین نمی‌توان ۳۰ کلاس اولی داشت، زیرا جدول تنها دارای ۳۶ خانه است.

حال یک مثال از جدولی که شامل ۲۹ کلاس اولی، ۶ کلاس دومی، و ۱ کلاس سومی است را ارائه می‌دهیم:

مرحله‌ی دوم سی و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور- آزمون چندگزینه‌ای

۲	۱	۱	۱	۱	۱
۲	۱	۱	۱	۱	۱
۲	۱	۱	۱	۱	۱
۲	۱	۱	۱	۱	۱
۲	۱	۱	۱	۱	۱
۳	۲	۱	۱	۱	۱

□

۱۸

اگر در سیطره‌ی دید هر دانش‌آموز کلاس اولی، تعداد دانش‌آموزان کلاس دومی حداقل به اندازه‌ی تعداد دانش‌آموزان کلاس اولی (در سیطره‌ی دید او) باشد، و در سیطره‌ی دید هر دانش‌آموز کلاس دومی، تعداد دانش‌آموزان کلاس سومی حداقل به اندازه‌ی تعداد دانش‌آموزان کلاس دومی باشد، حداکثر چند دانش‌آموز کلاس اولی می‌تواند در جدول وجود داشته باشد؟

۱۹ (۵)

۱۵ (۴)

۱۲ (۳)

۲۱ (۲)

۱۸ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

برای اثبات، ابتدا از برهان خلف استفاده می‌کنیم و نشان می‌دهیم که تعداد کلاس اولی‌ها نمی‌تواند بیش‌تر از ۱۸ باشد.

فرض کنید که تعداد کلاس اولی‌ها بیش‌تر از ۱۸ باشد. در این صورت، حداقل یک سطر و یک ستون وجود دارد که هرکدام حداقل ۴ کلاس اولی دارند. بدون کاسته شدن از کلیت مسئله، فرض کنیم این سطر و ستون، سطر اول و ستون اول باشند. حال روی خانه‌ی تقاطع این سطر و ستون (خانه‌ی تقاطع) حالت‌بندی می‌کنیم:

- اگر خانه‌ی تقاطع کلاس اولی باشد: در این حالت، مجموعاً در این سطر و ستون حداقل ۶ کلاس اولی وجود دارد. از آنجا که سطر و ستون اول هرکدام ۶ خانه دارند، ۵ خانه‌ی باقی‌مانده در این سطر و ستون باید کلاس دومی باشند. اما وجود ۶ کلاس دومی در این ۵ خانه ممکن نیست. بنابراین این حالت نقض فرض است.

- اگر خانه‌ی تقاطع کلاس دومی باشد: در این حالت، در سطر یا ستون اول حداقل یک کلاس سومی وجود دارد. بدون کاسته شدن از کلیت مسئله، فرض کنیم کلاس سومی در ستون اول قرار دارد. اکنون توجه کنید که کلاس اولی‌های ستون اول، در سطر خود ۳ کلاس اولی و ۱ کلاس دومی می‌بینند. بنابراین، در هر یک از این ۴ سطر، باید تعداد کلاس دومی‌ها حداقل ۲ عدد بیش‌تر از تعداد کلاس اولی‌ها باشد. در نتیجه، در هر کدام از این سطرها حداکثر ۱ کلاس اولی دیگر داریم. بنابراین در این ۴ سطر حداکثر $8 = 4 \times 2$ کلاس اولی وجود دارد.

در دو سطر دیگر نیز حداکثر ۱۰ کلاس اولی وجود دارد. پس در کل حداکثر $18 = 10 + 8$ کلاس اولی وجود دارد که با فرض برهان خلف در تناقض است.

- اگر خانه‌ی تقاطع کلاس سومی باشد: در این حالت، در ستون اول ۱ کلاس سومی و حداکثر ۱ کلاس دومی داریم. حال شرایط مشابه حالت قبلی خواهد بود. باز هم نشان می‌دهیم که در کل حداکثر ۱۸ کلاس اولی می‌توانیم داشته باشیم که با برهان خلف در تناقض است.

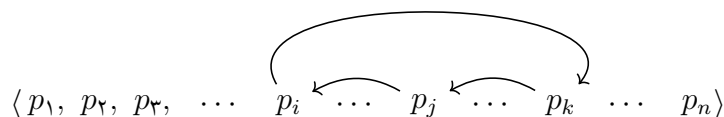
مرحله‌ی دوم سی و چهارمین المپیاد کامپیوتر کشور- آزمون چندگزینه‌ای

بنابراین ثابت می‌شود که تعداد کلاس اولی‌ها نمی‌تواند بیش‌تر از ۱۸ باشد.
مثال برای ۱۸: یک نمونه چیدمان برای ۱۸ کلاس اولی در جدول زیر آمده است:

۲	۲	۳	۱	۱	۱
۳	۲	۲	۱	۱	۱
۲	۳	۲	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۳	۲	۲
۱	۱	۱	۲	۲	۳
۱	۱	۱	۲	۳	۲

□

مارال جایگشت n تایی تماماً صعودی $\langle 1, 2, 3, \dots, n-1, n \rangle$ را دارد و می‌خواهد آن را با تعدادی حرکت، به جایگشت تماماً نزولی $\langle n, n-1, \dots, 3, 2, 1 \rangle$ تبدیل کند. او در هر حرکت، می‌تواند مانند شکل زیر، سه جایگاه (i, j, k) با شرط $1 \leq i < j < k \leq n$ را در جایگشت خود انتخاب کند و اعداد این سه جایگاه را در آن، دَوَران دهد؛ یعنی عدد جایگاه j اُم را به جایگاه i اُم ببرد، عدد جایگاه k اُم را به جایگاه j اُم ببرد، و عدد جایگاه i اُم را به جایگاه k اُم ببرد. مثلاً با فرض داشتن جایگشت $\langle 3, 6, 5, 4, 1, 2 \rangle$ ، اگر او سه جایگاه $(2, 3, 6)$ را برای حرکت دَوَران انتخاب کند، بعد از انجام این حرکت، به جایگشت $\langle 3, 5, 2, 4, 1, 6 \rangle$ می‌رسد.



با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

به‌ازای چند عدد صحیح n در محدوده‌ی ۲۰۰۰ تا ۲۰۲۵ (شامل هر دوی این اعداد)، مارال می‌تواند با انجام تعدادی حرکت دَوَران، جایگشت n تایی تماماً صعودی خود را به جایگشتی تماماً نزولی تبدیل کند؟

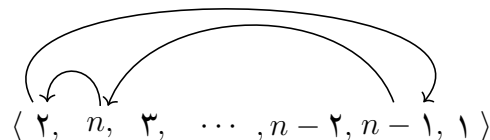
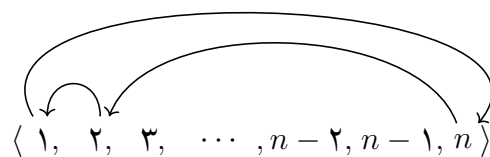
۱۴(۱) ۱۳(۲) ۰(۳) ۲۶(۴) ۱۷(۵)

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

انجام این دَوَران معادل انجام دو جابه‌جایی (swap) است. به این شکل که ابتدا p_i را با p_j جابه‌جا می‌کنیم، سپس p_j را با p_k جابه‌جا می‌کنیم. با انجام این دو جابه‌جایی می‌بینیم که اعداد مشابه دَوَران جابه‌جا می‌شوند. حال توجه کنید که در ابتدا، تعداد نابه‌جایی‌های دنباله معادل انتخاب دو از n است. هر جابه‌جایی (swap) زوجیت تعداد نابه‌جایی‌ها را تغییر می‌دهد، بنابراین هر دَوَران زوجیت تعداد نابه‌جایی‌ها را ثابت نگه می‌دارد. زوجیت تعداد نابه‌جایی‌ها در انتهای فرآیند زوج (صفر) است، بنابراین اگر در ابتدا فرد باشد این کار ممکن نیست. تعداد انتخاب از دو از n برای n ‌های به شکل $4k$ و $4k+1$ زوج است و برای بقیه فرد است. حال ثابت می‌کنیم این کار برای $n = 4k$ یا $n = 4k+1$ ممکن است. این مسئله را با استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم:

پایه: برای $k = 0$ این موضوع مشخص است.

گام: اگر فرض کنیم این کار برای n ممکن است، ثابت می‌کنیم اینکار برای $n+4$ نیز ممکن است. ابتدا جای ۱ را با n و جای ۲ را با $n-1$ تغییر می‌دهیم. این کار را مطابق شکل زیر انجام می‌دهیم.



$$\langle n, n-1, 3, \dots, n-2, 2, 1 \rangle$$

سپس بازه‌ی ۳ تا $n-2$ را با استفاده از فرض استقرا برعکس می‌کنیم. با این کار گام استقرا ثابت می‌شود. تعداد اعدادی که به شکل $4k+1$ یا $4k$ هستند و در بازه‌ی خواسته شده قرار دارند، ۱۴ عدد است.

□

۲۰ به ازای $n = 3333$ ، مارال حداقل چند حرکت دوران نیاز دارد تا بتواند جایگشت n تایی تماماً صعودی خود را به جایگشتی تماماً نزولی تبدیل کند؟

۱) ۱۱۱۱ (۲) ۲۴۹۹ (۳) ۱۱۱۳ (۴) ۱۶۶۶ (۵) ۲۲۲۲

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

اگر به روش گرفته شده در سوال قبل عمل کنیم، با ۱۶۶۶ حرکت می‌توان اعداد را برعکس کرد. برای هر ۴ عدد باید ۲ دوران انجام داد. بنابراین با ۱۶۶۶ حرکت می‌توانیم به هدفمان برسیم. چرا با کمتر از این مقدار نمی‌توانیم به هدفمان برسیم؟ هر دوران دقیقاً یک عدد را یک جایگاه جلوتر از جایگاه فعلی‌اش می‌برد. در جایگشت اعداد ۱ تا ۱۶۶۶ هر عدد باید به جایگاهی جلوتر از خود منتقل شود. بنابراین به حداقل ۱۶۶۶ دوران نیاز داریم.

□