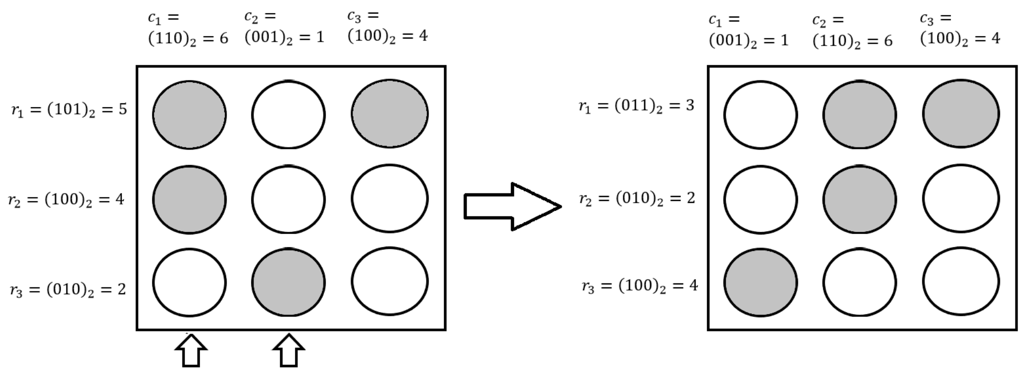
تابستان سی‌امین دوره المپیاد کامپیوتر

آزمون نظری دوم

یکشنبه ۶ مهر ۱۳۹۹ — وقت: ۵ ساعت

مسأله‌ی یکم. نمایشگر پیکسلی زاریچ .... ۱۰۰ امتیاز

پدر زاریچ برای کادوی روز تولد زاریچ یک نمایشگر پیکسلی $n \times m$ خریده که دارای n سطر و m ستون است که سطرها از بالا به پایین با اعداد ۱ تا n و ستون‌ها از چپ به راست با اعداد ۱ تا m شماره‌گذاری شده‌اند. کنار هر سطر و هر ستون عددی نوشته شده‌است. عدد نوشته‌شده کنار سطر iام r_i و عدد نوشته‌شده در کنار ستون iام c_i است. نمایش دودویی (باینری) عدد نوشته‌شده در کنار هر سطر یا ستون متناظر با پیکسل‌های آن سطر یا ستون است، به طوری که اگر پیکسل سطر iام و ستون jام روشن باشد بیت jام نمایش دودویی عدد r_i و بیت iام نمایش دودویی عدد c_j برابر یک است.
یکی از قابلیت‌های این نمایشگر این است که می‌توان دو تا سطر یا دو تا ستون از آن را جابه‌جا کرد. پس از هر جابه‌جایی مقادیر c_i و r_iها نیز بروزرسانی می‌شوند.



پیکسل‌های خاکستری روشن هستند و با جابه‌جایی دو ستون مقادیر کنار سطرها و ستون‌ها تغییر می‌کنند.

زاریچ که لپتاپ می‌خواست از این کادو خوشش نیامد و به پدرش گفت که برایش لپتاپ بخرد. پدرش هم برای اینکه او را به سراغ نخودسیاه بفرستد تعدادی از خانه‌های نمایشگر را روشن کرد و از او خواست بدون خاموش و روشن کردن پیکسل‌ها و صرفا با عملیات جابه‌جایی سطر یا ستون، کاری کند که هم c_iها و هم r_iها نانزولی شوند. زاریچ بسیار باهوش است و با جابه‌جایی سطرها و ستون‌ها کاری کرد تا شرط بالا برقرار شود. اما این سؤال برایش پیش آمده که اگر پدرش در ابتدا به هر نحوی پیکسل‌ها را روشن یا خاموش می‌کرد آیا باز هم می‌توانست به چنین نتیجه‌ای برسد؟ شما به عنوان دوست زاریچ ثابت کنید مستقل از وضعیت اولیه پیکسل‌ها با دنباله‌ای از جابه‌جایی دو سطر یا دو ستون می‌توان کاری کرد که c_iها و r_iها نانزولی شوند.

مسأله‌ی دوم. طرح زوج و فرد .... ۱۰۰ امتیاز

زاریچ در کنار فعالیت‌های درسیش در شرکت راه‌سازی «صراط مستقیم» پیمانکار است. شهردار در صدد پیاده‌سازی «طرح زیباسازی» در قزوین برآمده است. قزوین دارای تعدادی تقاطع و تعدادی جاده دوطرفه بین تقاطع‌هاست. برخی از تقاطع‌ها در قزوین **مهم** هستند.

می‌گوییم یک شهر **زیباپذیر** است اگر تمامی جاده‌های آن خاکی باشد و گراف متناظر با تقاطع‌ها و جاده‌های آن **ساده**، **همبند** و **بدون یال برشی** باشد. به عبارتی پس از حذف کردن یک جاده دلخواه از این شهر همچنان با جاده‌های باقی‌مانده بتوان از هر تقاطع به هر تقاطع دیگر رسید (جاده‌ها می‌توانند پل یا زیرگذر باشند پس لزومی ندارد مسطح باشد).
می‌توان یک شهر زیباپذیر را با سنگفرش کردن تعدادی جاده **زیبا** کرد به صورتی که تعداد جاده‌های سنگفرش منتهی به تقاطع‌های مهم فرد و تعداد جاده‌های سنگفرش منتهی به باقی تقاطع‌ها زوج باشد (مشخص است برای اینکه بتوان یک شهر را زیبا کرد لازم است که تعداد تقاطع‌های مهم زوج باشد). همچنین **هزینه‌ی زیباسازی** یک شهر برابر است با **حداقل** تعداد جاده‌هایی که باید سنگفرش شوند تا شهر زیبا شود. برای مثال هزینه زیباسازی شهری که هیچ تقاطع مهمی ندارد صفر است.
زاریچ از تصمیم شهردار با خبر شده و چون صراط مستقیم به صورت انحصاری جاده‌های خاکی را سنگفرش می‌کند، می‌خواهد ببیند که شرکت چقدر پول از این پروژه دولتی به جیب می‌زند. اما او نمی‌داند که تقاطع‌ها چگونه به یکدیگر وصل شده اند و کدام تقاطع‌ها مهم هستند و تنها می‌داند قزوین شهری با n تقاطع و **زیباپذیر** است.
به زوج مرتب (G,A) یک **سناریو** می‌گوییم که در آن گراف متناظر با شهر قزوین گراف G است و زیرمجموعه‌ی زوج عضوی A از تقاطع‌های قزوین مهم هستند. دو سناریو مانند (G_1,A_1) و (G_2,A_2) متمایز هستند اگر و تنها اگر یا G_1 با G_2 یکریخت نباشد و یا یکریخت هستند و $A_1 \neq A_2$.
زاریچ مشغول بازی با نمایشگر پیکسلی‌اش است پس از شما می‌خواهد:

آ. بیشینه‌ی هزینه‌ی زیباسازی شهر قزوین را برحسب n میان تمامی سناریوهای ممکن بیابید. (۳۰ امتیاز)

ب. مشخص کنید به ازای چند سناریو (باز هم برحسب n) هزینه زیباسازی شهر قزوین بیشینه است (به عبارتی برابر با مقدار به دست آمده در قسمت قبل است).

مسأله‌ی سوم. رنگ‌آمیزی .... ۱۰۰ امتیاز

آرایه $a_1,a_2,\dots,a_n$ شامل n عدد صحیح **متمایز** است. عدد رنگی این آرایه کوچکترین عدد طبیعی مثل C است که بتوان با C رنگ، مجموعه اعداد صحیح را رنگ کرد طوری که شرط زیر برقرار باشد:

برای هر i و j که $1 \le i < j \le n$ و هر x صحیح دلخواه، رنگ دو عدد a_i+x و a_j+x متفاوت باشد.

می‌خواهیم با تعدادی عملیات کاری کنیم که عدد رنگی آرایه کمتر یا مساوی n شود. در هر عملیات می‌توانیم یکی از دو کار زیر را انجام دهیم.

- یکی از اعضای آرایه را به علاوه ۱ کنیم.
- یکی از اعضای آرایه را منهای ۱ کنیم.

ثابت کنید با کمتر یا مساوی $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ عملیات می‌توانیم به خواسته‌مان برسیم. دقت کنید در طی عملیات‌ها ممکن است بعضی از اعضای آرایه برابر شوند، اما در انتها تمامی اعداد باید **متمایز** باشند.
در صورتی که ثابت کنید با کمتر یا مساوی $\left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor$ عملیات نیز می‌توانیم به خواسته‌مان برسیم، **۲۵ امتیاز** دریافت می‌کنید.

لحظه‌ها را گذراندیم که به خوشبختی برسیم؛ غافل از اینکه لحظه‌ها، همان خوشبختی بودند.

علی شریعتی