باسمه‌تعالی

دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

آزمون نهایی نظری دوم

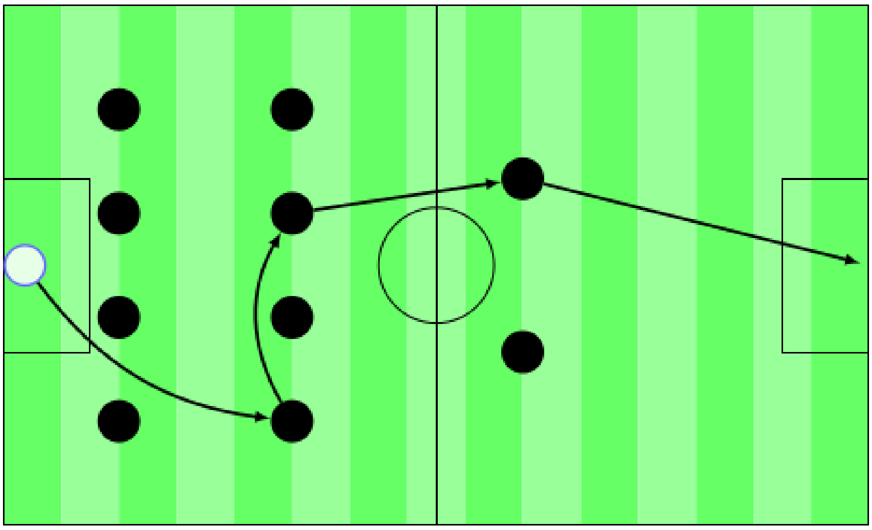
دوشنبه ۱۳ شهریور ۱۳۹۶ — وقت: ۴ ساعت و ۳۰ دقیقه

توضیحات:

- ترتیب سوالات به صورت تصادفی است.
- امتیاز تمام سوالات برابر است.

مسأله‌ی یکم. تیکی‌تاکا .... ۱۰۰ امتیاز

در دنیای سلطان تیم‌های فوتبال به جای ۱۱ نفر، n نفر دارند. در این دنیا آرسنال با سیستم $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$ بازی می‌کند؛ یعنی یک نفر در دروازه می‌ایستد، در خط جلوی او a_1 نفر، در خط بعدی a_2 نفر و ... و در جلوترین خط a_k نفر قرار می‌گیرند. برای مثال شکل زیر تیمی ۱۱ نفره با سیستم $\langle 4, 4, 2 \rangle$ است:



یک گل در تیم آرسنال به این صورت به ثمر می‌رسد که بازی از دروازه‌بان آغاز می‌شود، به هر بازی‌کنی که توپ برسد، یا آن را با یک شوت تبدیل به گل می‌کند و یا به یکی از بازی‌کنان هم‌خط خود یا خطوط جلوتر پاس می‌دهد. در یک گل به هر نفر حداکثر یک بار توپ می‌رسد. برای مثال شکل بالا نمایشی از یک گل مجاز با سه پاس است.

تمام روش‌های گل زدن در تیم آرسنال را در نظر بگیرید. به ازای هر روش، تعداد پاس‌هایی را که داده می‌شود، شمرده و این مقادیر را با هم جمع کنید. این مقدار (جمع تعداد پاس‌ها در تمام روش‌ها) را **عددی تیکی‌تاکایی** می‌نامیم. شما باید با دریافت k و a_i ها از ورودی، عدد تیکی‌تاکایی را در پیمانه‌ی $10^9 + 7$ بدهید. الگوریتمی از $O\Big(k + max(a_1, \ldots, a_k)\Big)$ برای این کار بیابید.

مسأله‌ی دوم. به یاد استاد .... ۱۰۰ امتیاز

فرض کنید G یک گراف جهت‌دار با رأس‌های ۱ تا n باشد. به ازای هر $1 \leq i, j \leq n$ یک یال جهت‌دار از رأس i به رأس j با وزن $a(i, j) \in \mathbb{R}$ وجود دارد. توجه کنید لزومن $i \neq j$ نیست و از هر رأس به خودش نیز یک یال وجود دارد.

فرض کنید $\pi = \langle \pi_1, \ldots, \pi_n \rangle$ یک جایگشت از اعداد ۱ تا n باشد. تعداد وارونگی‌های π را با $inv(\pi)$ نشان می‌دهیم. **عدد سلطانی** π برابر با

$$S(\pi) = (-1)^{inv(\pi)} \prod_{i=1}^{n} a(i, \pi_i)$$

است.

فرض کنید $W = \langle v_1, v_2, \ldots v_k, v_1 \rangle$ یک گشت بسته در گراف G باشد. به این گشت **ایلیچی** گوییم، اگر v_1 فقط در ابتدا و انتهای گشت ظاهر شده و شماره‌ی آن از تمام رأس‌های دیگر گشت کم‌تر باشد. به v_1 نماینده‌ی گشت W گفته و آن را با $r(W)$ نشان می‌دهیم. **توان** گشت W برابر با ضرب اعداد تمام یال‌های آن است و با $p(W)$ نشان داده می‌شود. به دنباله‌ای از گشت‌های ایلیچی مانند $D = \langle W_1, \ldots, W_t \rangle$ **ایلیچانوفی** گوییم، اگر در مجموع n یال داشته و $r(W_1) < \ldots < r(W_t)$ باشد. **عدد ایلیچی** D برابر با

$$I(D) = (-1)^{n+t} \prod_{i=1}^{t} p(W_i)$$

تعریف می‌شود.

مجموعه‌ی تمام جایگشت‌های اعداد ۱ تا n را با A و مجموعه‌ی تمام دنباله‌های ایلیچانوفی را با B نشان می‌دهیم. ثابت کنید:

$$\sum_{\pi \in A} S(\pi) = \sum_{D \in B} I(D)$$

مسأله‌ی سوم، مافیلا .... ۱۰۰ امتیاز

فرض کنید m و k دو عدد طبیعی باشند. مافیلاباس تضمین کرده است که اگر n نقطه‌ی دل‌خواه در صفحه داشته باشیم که $n \geq m$ و بتوان هر m نقطه از آن‌ها را توسط k خط پوشاند، آن گاه می‌توانیم تمام n نقطه را توسط k خط بپوشانیم. ثابت کنید اگر $m < \binom{k+2}{2}$ باشد، تضمین مافیلاباس اشتباه است.

مرگ نزدیک است
و زمان با هم بودن اندک
امام علی (ع)